Differentialformen
Wintersemester 2011/2012

PD Dr. Peter Massopust
26. Oktober 2011

Übungsblatt 1

1. Es seien E und F normierte Räume. Man zeige, dass $L(E, F)$ ein Banachraum ist, wenn F ein Banachraum ist.

2. Es sei E ein endlichdimensionaler normierter Raum und F ein beliebiger normierter Raum. Man beweise, dass dann E ein Banachraum ist und jede lineare Abbildung $E \to F$ stetig ist.

3. Es sei $f \in A_p(E, F)$. Man beweise folgende Aussagen.

   (a) Ist $x_i = x_j$ for $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, $i \neq j$, so ist $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots x_p) = 0$.

   (b) $\forall \sigma \in S_p$ gilt: $(\sigma f)(x_1, \ldots, x_p) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_p)$.

   (*Hinweis: Man beweise zuerst (b) und dieses zuerst für Transpositionen. Teil (a) folgt dann aus Teil (b) durch Wahl eines geeigneten σ.*)

4. Man zeige, daß jedes $f \in A_p(E, F)$, $p \in \mathbb{N}$, anti-symmetrisch ist.

5. Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, V^* sein Dualraum, und $p, q \in \mathbb{N}$. Eine (p, q)-Linearform auf V ist eine in jeder einzelnen Veränderlichen lineare Abbildung

   $$\phi : V^p \times (V^*)^q \to \mathbb{R}.$$

   Eine $(p, 0)$-Linearform heißt auch p-Linearform und eine 0-Linearform ist eine reelle Zahl. Die (p, q)-Formen bilden einen Vektorraum, der mit $V^{p,q}$ bezeichnet wird. Die Elemente von $V^{p,q}$ heißen Tensoren. Man zeige, dass die Determinante einer $(n \times n)$-Matrix, aufgefasst als alternierende multilineare Abbildung der Spalten, ein $(0, n)$-Tensor ist.