

Übungsblatt 11

1. Man zeige, daß für jede singuläre k -Kette $K \in \mathcal{C}_k(U)$ gilt: $\partial\partial K = 0$.
2. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^m$ offen und sei $F : U \rightarrow V$ eine Abbildung der Klasse C^1 . Ferner sei $\omega \in \Omega_k^{(n)}(V, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

3. Sei \mathbb{S}^k die k -dimensionale Einheitssphäre im \mathbb{R}^{k+1} . Man finde eine Differentialform $\omega \in \Omega_k^{(n)}(\mathbb{S}^k, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}_0$, so daß gilt

$$\int_{\mathbb{S}^k} \omega \neq 0.$$

4. Es seien M und N Mengen im \mathbb{R}^m , $m \in \mathbb{N}$, und $f, g : M \rightarrow N$ Abbildungen der Klasse C^n , $n \in \mathbb{N}_0$. Die Abbildungen f und g heißen (C^n) -homotop zueinander, in Zeichen $f \simeq g$, wenn eine Abbildung $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ der Klasse C^n existiert, so daß

$$F \circ i_0 = f \quad \text{und} \quad F \circ i_1 = g$$

gilt. Hierbei ist $i_t : M \rightarrow M \times [0, 1]$ die kanonische Einbettung $x \mapsto (x, t)$.

- (a) Man zeige, daß \simeq eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen $f : M \rightarrow N$ der Klasse C^n ist.
- (b) Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ eine echte Untermenge welche \mathbb{S}^1 im Inneren enthält. Ferner sei $p : K \rightarrow \mathbb{C}$, $p(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$, $n \in \mathbb{N}_0$, ein Polynom das auf K nullstellenfrei ist. Man definiere $f : K \rightarrow \mathbb{S}^1$ durch

$$f(z) := \frac{p(z)}{|p(z)|},$$

und $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $g := f|_{\mathbb{S}^1}$. Man zeige, daß g homotop zur Abbildung $p_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $p_n(z) := z^n$, ist