Differentialformen
Wintersemester 2011/2012

PD Dr. Peter Massopust
01. Februar 2012

Übungsblatt 12

Im Folgenden sei $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, mit der kanonischen Orientierung $\mathscr{O}$ versehen und K eine m-dimensionale kompakte berandete (gleichorientierte) Fläche im $\mathbb{R}^m$.

1. Seien $\phi \in \Omega_p(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ and $\psi \in \Omega_{p-1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. Man beweise die *Greensche Integralformel*:

$$\int_K \langle\, d\psi,\, \phi \rangle_p \, dV + \int_K \langle\, \psi,\, \delta\phi \rangle_{p-1} \, dV = \int_{\partial K} \psi \wedge *\phi.$$

2. Man zeige, daß für $\omega \in \Omega_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ gilt:

$$\int_K \delta\omega \, dV = \int_{\partial K} *\omega.$$

3. Man beweise, daß für $f, g \in \Omega_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ gilt:

$$\int_K f \cdot \Delta g \, dV + \int_K \langle\, df,\, dg \rangle_1 \, dV = \int_{\partial K} f \cdot *dg$$

und

$$\int_K (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f) \, dV = \int_{\partial K} (f \cdot *dg - g \cdot *df).$$

4. Eine singuläre k-Kette $Z \in \mathcal{C}_k(U)$ heißt ein *k-Zyklus* falls $\partial Z = 0$ ist. Man zeige, daß für jeden $(k+1)$-Zyklus Z und jedes $\omega \in \Omega_k(U, \mathbb{R})$ gilt:

$$\int_Z d\omega = 0.$$

Beachte, daß diese Aussage dual ist zu: *Für jede geschlossene Differentialform $\omega \in \Omega_k(U, \mathbb{R})$ und jede singuläre $(k+1)$-Kette K gilt*

$$\int_{\partial K} \omega = 0.$$

(a) Zwei k-Zyklen Z_1 und Z_2 heißen *homolog* falls es eine $(k+1)$-Kette K gibt mit $Z_1 - Z_2 = \partial K$. Man zeige, daß für homologe k-Zyklen Z_1 und Z_2, und jede geschlossene Differentialform $\omega \in \Omega_k(U, \mathbb{R})$ gilt:

$$\int_{Z_1} \omega = \int_{Z_2} \omega.$$

(b) Zeige, daß der unten dargestellte Zyklus Z *null-homolog* ist, d.h. Z homolog zum trivialen Zyklus 0 ist, und daher $\int_Z \omega = 0$ ist, für jede geschlossene Differentialform $\omega \in \Omega_k(U, \mathbb{R})$.

Z =