Differentialformen
Wintersemester 2011/12

PD Dr. Peter Massopust
02. November 2011

Übungsblatt 2

1. Seien $i_1, i_2 \in \mathbb{N}$. Definiere $\delta(i_1, i_2)$ als

$$\delta(i_1, i_2) := \begin{cases} +1, & \text{falls } i_1 < i_2; \\ 0, & \text{falls } i_1 = i_2; \\ -1, & \text{falls } i_1 > i_2. \end{cases}$$

Für $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$ und jedes p-Tupel $(i_1, \dots, i_p)$ natürlicher Zahlen setze man

$$\delta(i_1, \dots, i_p) := \prod_{\substack{\mu,\nu=1,\dots,p \\ \mu<\nu}} \delta_{i_\mu, i_\nu}.$$

Die Funktion $\delta : \mathbb{N}^p \to \{-1, 0, +1\}$, $(i_1, \dots, i_p) \mapsto \delta(i_1, \dots, i_p)$, heisst *Kronecker-Symbol*.
Man zeige:

(a) $\delta(i_1, \dots, i_\mu, i_{\mu+1}, \dots, i_p) = -\delta(i_1, \dots, i_{\mu+1}, i_\mu, \dots, i_p)$.

(b) Sei $j_1 < \cdots < j_p$ die natürliche Reihenfolge der $i_1, \dots, i_p$. Dann gilt: $\delta(i_1, \dots, i_p) = (-1)^n$, wobei $(-1)^n$ das Vorzeichen der Permutation ist welche $i_1, \dots, i_p$ in $j_1, \dots, j_p$ überführt.

2. Sei $f \in L_p(E; \mathbb{R})$. Dann heisst der Ausdruck

$$(\mathcal{A}f)(x_1, \dots, x_p) := \frac{1}{p!} \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq p \\ i_\mu \neq i_\nu \text{ für } \mu \neq \nu}} \delta(i_1, \dots, i_p)\, f(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$$

der a*lternierende Anteil* von f. Ist $p = 0$, so setzte man $\mathcal{A}f := f$.
Man zeige:

(a) $\mathcal{A}f : E^p \to \mathbb{R}$ ist eine multilineare Abbildung.

(b) Falls $f \in A_p(E; \mathbb{R})$ ist, so ist $\mathcal{A}f = f$.

(c) $\mathcal{A}f$ ist eine antisymmetrische multilineare Abbildung.

(d) Die Abbildung $\mathcal{A} : L_p(E; \mathbb{R}) \to A_p(E; \mathbb{R})$, auch *Alternation* benannt, is idempotent, d.h., $\mathcal{A}(\mathcal{A}f) = \mathcal{A}f$.

3. Seien $f \in A_p(E; \mathbb{R})$ und $g \in A_q(E; \mathbb{R})$. Darüberhinaus, sei $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y) \mapsto xy$. Man zeige, dass

$$f \wedge_\Phi g = \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathcal{A}(f \cdot g) \tag{1}$$

ist. (Hier bedeutet $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation von Abbildungen.) Gleichung (1) ist eine alternative Definition des äusseren Produkts im Falle dass $F := G := H := \mathbb{R}$ ist.

4. Seien $k, p \in \mathbb{N}$ mit $p \leq k$. Man leite eine Formel für die Dimension des Vektorraumes $A_p(\mathbb{R}^k; \mathbb{R})$ her.