Differentialformen
Wintersemester 2011/2012

PD Dr. Peter Massopust
09. November 2011

Übungsblatt 3

1. Es seien $f \in A_p(E;\mathbb{R})$, $g \in A_q(E;\mathbb{R})$ und $h \in A_r(E;\mathbb{R})$. Es bezeichne $\wedge$ das äußere Produkt bezüglich der stetigen bilinearen Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$. Man zeige die folgenden Eigenschaften:

   (a) $(f+g) \wedge h = f \wedge h + g \wedge h$.

   (b) $h \wedge (f+g) = h \wedge f + h \wedge g$.

   (c) $f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h$.

   (d) $\forall \alpha \in \mathbb{R}:\ \alpha(f \wedge g) = (\alpha f) \wedge g = f \wedge (\alpha g)$.

2. Es seien $E := \mathbb{R}^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, $F := G := H := \mathbb{R}$ and $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$. Betrachte die 2-Form
$$f := u_1 \wedge u_2 + u_3 \wedge u_4 + \cdots + u_{2n-1} \wedge u_{2n},$$
wobei $u_i : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_i$, $i = 1, \ldots, 2n$, die i-te Koordinatenform ist. Man berechne das n-fache äußere Produkt $\overset{n}{\wedge} f$ von f mit sich selbst.

3. Es sei wieder $F := G := H := \mathbb{R}$ and $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $U \subseteq E$, sei
$$\Omega^{(n)}(U,\mathbb{R}) := \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Omega_p^{(n)}(U,\mathbb{R}).$$
Man zeige, daß sich die äußere Multiplikation $\wedge : \Omega_p^{(n)}(U,\mathbb{R}) \times \Omega_q^{(n)}(U,\mathbb{R}) \to \Omega_{p+q}^{(n)}(U,\mathbb{R})$ linear auf $\Omega^{(n)}(U,\mathbb{R})$ fortsetzen läßt. Man benutze dann dieses Resultat um zu zeigen, daß der Vektorraum $\Omega^{(n)}(U,\mathbb{R})$ mit der äußeren Multiplikation $\wedge : \Omega^{(n)}(U,\mathbb{R}) \times \Omega^{(n)}(U,\mathbb{R}) \to \Omega^{(n)}(U,\mathbb{R})$ versehen zu einer assoziativen Algebra wird.

4. Es gelten die Voraussetzungen von Problem 3. Ein *Lie-Produkt* in einem Vektorraum V ist eine anti-symmetrische Abbildung $(u,v) \mapsto [u,v]$ von V in sich selbst, welche die sogenannte *Jacobi-Identität* erfüllt:
$$[[u,v],w] + [[v,w],u] + [[w,u],v] = 0.$$
Man zeige, daß im Falle $V := \Omega^{(n)}(U,\mathbb{R})$ ein Lie-Produkt durch $[f,g] := f \wedge g - g \wedge f$ definiert wird.