Differentialformen
Wintersemester 2011/2012

PD Dr. Peter Massopust
16. November 2011

Übungsblatt 4

1. Eine Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$ heißt *zulässig*, wenn für jeden Punkt $x_0 := (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n}) \in U$ gilt: Sind $\Delta_1, \ldots, \Delta_n : U \to \mathbb{R}$ in x_0 stetige Funktionen und
$$\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{0,\nu})\Delta_\nu(x) \equiv 0$$
auf U, so ist $\Delta_\nu(x_0) = 0$, $\forall \nu = 1, \ldots, n$.

   Man zeige, dass eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 einer zulässigen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ genau dann differenzierbar ist, wenn es n reelle Funktionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ auf U gibt, die alle in x_0 stetig sind und in U der Gleichung
$$f(x) = f(x_0) + \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{0,\nu})\Delta_\nu(x)$$
genügen.

2. Man benutze obiges Resultat um Hilfsatz 42 zu beweisen.

3. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Man führe auf der Menge aller differenzierbaren Abbildungen
$$\{f \mid f : U \to \mathbb{R}^n, \text{ für eine Umgebung } U \text{ von } x_0\}$$
folgende Äquivalenzrelation ein:
$$f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \text{ eine Umgebung } V \text{ von } x_0, \text{ so dass } f|V = g|V.$$
Die Äquivalenzklassen von $\sim$ heissen *Keime* der Abbildung $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ um x_0 und man bezeichnet einen durch f repräsentierten Keim durch $f_{x_0} : (\mathbb{R}^m, x_0) \to (\mathbb{R}^n, y_0)$, wenn $y_0 := f(x_0)$ ist. Keime werden mittels geeigneter Repräsentanten zusammengesetzt. Ein *Funktionskeim* ist ein differenzierbarer Keim $(\mathbb{R}^m, x_0) \to (\mathbb{R}, y_0)$. Die Menge aller Funktionskeime um x_0 werde mit $\mathcal{C}_{x_0}$ bezeichnet. Man zeige:

   (a) Bezüglich er Addition, Multiplikation und Skalarenmultiplikation auf Repräsentanten hat $\mathcal{C}_{x_0}$ die Struktur einer reellen Algebra.

   (b) Ein differenzierbarer Keim $f_{x_0} : (\mathbb{R}^m, x_0) \to (\mathbb{R}^n, y_0)$ definiert durch Zusammensetzen einen (kontravarianten) Algebrahomomorphismus,
$$f^* : \mathcal{C}_{y_0} \to \mathcal{C}_{x_0}, \qquad \phi_{y_0} \mapsto \phi_{y_0} \circ f_{x_0}, \quad y_0 = f(x_0).$$

   (c) Es gilt: $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$ und $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

4. Man zeige, dass $\mathfrak{m}_{x_0} := \{f_{x_0} \in \mathcal{C}_{x_0} \mid f_{x_0}(x_0) = 0\}$ das einzige maximale Ideal von $\mathcal{C}_{x_0}$ ist.

5. Es sei $\mathfrak{m}_{x_0}^2$ das Ideal der Keime f_{x_0}, für welche die erste Ableitung in x_0 verschwindet. Der Quotientenvektorraum $T_{x_0}^* := \mathfrak{m}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0}^2$ heißt der *Cotangentialraum von* $\mathbb{R}^n$ *im Punkt* x_0. Man zeige, dass für $f \in \mathcal{C}_{x_0}$ gilt:
$$df(x_0) = (f - f(x_0)) \mod \mathfrak{m}_{x_0}^2.$$