

Übungsblatt 5

1. Man beweise: Für $\phi \in \Omega_p^{(n)}(U, \mathbb{R})$ und $\psi \in \Omega_q^{(n)}(U, \mathbb{R})$ ist $\phi \wedge \psi = (-1)^{pq} \psi \wedge \phi$. Insbesondere ist für $p \in \mathbb{N}$ ungerade, $\phi \wedge \phi = 0$.
2. Es seien $G := \mathbb{R}$ und $H := F$ und $\Phi : F \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei Skalarmultiplikation. Ferner sei $f : U \subseteq E \rightarrow F$ eine Funktion der Klasse C^1 und $\omega \in \Omega_p^{(1)}(U, \mathbb{R})$. Man zeige:

$$d(f \cdot \omega) = (df) \wedge \omega + f \cdot d\omega.$$

(Siehe Beispiele 35 (1) für die Bedeutung von $f \cdot \omega$ und $f \cdot d\omega$.)

3. Seien $E := \mathbb{R}^k$, $H := F := \mathbb{R}$, und sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse C^1 . Ferner bezeichne $\phi := dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$, $p, k \in \mathbb{N}$, $p \leq k$, eine Differentialform der Klasse C^1 . Man zeige:
 - (a) $d\phi = 0$.
 - (b) $d(f \cdot \phi) = (df) \wedge \phi$.
 - (c) Für eine beliebige Differentialform $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U, \mathbb{R})$,

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq k} c_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p},$$

wobei $c_{i_1 \dots i_p}$ Funktionen der Klasse C^1 auf U sind, gilt daher:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq k} (dc_{i_1 \dots i_p}) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq k} \sum_{i=1}^k \frac{\partial c_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}. \end{aligned}$$

- (d) Es bezeichne (x, y, z) das kanonische Koordinatensystem im \mathbb{R}^3 . Berechnen Sie $d\omega$ falls $\omega := e^{xyz} dx \wedge dy - \sin(xy) dy \wedge dz + x^2 y z^3 dx \wedge dz$ ist.
4. Zeige:

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_p}} \right) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \{i_1, \dots, i_p\} \neq \{j_1, \dots, j_p\}, \\ +1, & \text{falls } \{i_1, \dots, i_p\} \text{ aus } \{j_1, \dots, j_p\} \text{ durch eine gerade} \\ & \text{Anzahl von Vertauschungen hervorgeht,} \\ -1, & \text{falls } \{i_1, \dots, i_p\} \text{ aus } \{j_1, \dots, j_p\} \text{ durch eine ungerade} \\ & \text{Anzahl von Vertauschungen hervorgeht.} \end{cases}$$