Differentialformen
Wintersemester 2011/2012

PD Dr. Peter Massopust
07. Dezember 2011

Übungsblatt 7

1. Es sei $\omega := z\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx$ eine Differentialform über dem $\mathbb{R}^3$. Man drücke ω in den folgenden Koordinatensystemen aus:

   (a) Parabolische Zylinderkoordinaten (ξ, η, z):
   $$x = \xi\,\eta, \quad y = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2), \quad z = z,$$
   wobei $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}_0^+$ und $z \in \mathbb{R}$ ist.

   (b) Prolate sphäroide Koordinaten (u, v, ϕ):
   $$x = \sinh u \sin v \cos\phi, \quad y = \sinh u \sin v \sin\phi, \quad z = \cosh u \cos v,$$
   wobei $u \in \mathbb{R}_0^+$, $v \in [0, \pi]$ und $\phi \in [0, 2\pi]$ ist.

2. Gegeben sei eine geschlossene 2-Differentialform $\omega := P\,dx \wedge dy + Q\,dy \wedge dz + R\,dz \wedge dx$, wobei P, Q, R Funktionen der Klasse C^1 im $\mathbb{R}^3$ sind. Man benutze die Konstruktion im Beweis des Satzes von Poincaré um eine Pfaffsche Form $\phi := A\,dx + B\,dy + C\,dz$ zu finden, so daß $\omega = d\phi$ gilt.

3. Man wende das Ergebnis der vorherigen Aufgabe auf die Differentialform
   $$\omega = z\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz - 2y\,dz \wedge dx$$
   an.

4. Man zeige, daß auf dem Vektorraum T_x, $x \in \mathbb{R}^3$, der Derivationen die Abbildung
   $$[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : T_x \times T_x \to T_x, \quad (D_1, D_2) \mapsto [D_1, D_2] := D_1 D_2 - D_2 D_1,$$
   ein Lie-Produkt ist. (Für die Definition von Lie-Produkt, siehe Aufgabe 4, Übungsblatt 3!)

5. Sei $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ wie in Aufgabe 4 definiert. Seien
   $$D_1 := y\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial y}, \quad D_2 := x\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial x}, \quad D_3 := x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x},$$
   Derivationen im $\mathbb{R}^3$.

   (a) Man berechne $[D_1, D_2]$, $[D_1, D_3]$ und $[D_2, D_3]$.

   (b) Zeige das $D_1 f = D_2 f = D_3 f = 0$ wenn $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ist.