

Übungsblatt 9

Die äußere Ableitung einer Differentialform $\omega \in \Omega_p(U; \mathbb{R})$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, der Klasse C^∞ ist eine Abbildung $d : \Omega_p(U; \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_{p+1}(U; \mathbb{R})$. Zu d existiert eine Coabbildung

$$\delta : \Omega_p(U; \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_{p-1}(U; \mathbb{R})$$

definiert durch

$$\delta\omega := \begin{cases} 0, & \omega \in \Omega_0(U; \mathbb{R}) \\ (-1)^{k(p+1)} * (d(*\omega)), & \omega \in \Omega_p(U; \mathbb{R}), p = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Die Abbildung δ heißt auch *Coableitung* (der Differentialform ω).

1. Man zeige folgende Eigenschaften der Coableitung.

- (a) $\delta\delta = 0$.
- (b) $*\delta d = d\delta*$.
- (c) $*d\delta = \delta d*$.
- (d) $d*\delta = \delta*d = 0$.
- (e) $\forall \omega \in \Omega_p(U; \mathbb{R}) : *(\delta\omega) = (-1)^{p-1}d(*\omega)$ and $\delta(*\omega) = (-1)^p*(d\omega)$.

2. Sei $\omega := f dx + g dy + h dz$ eine Pfaffsche Form über dem \mathbb{R}^3 , wobei $f, g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen der Klasse C^∞ sind. Man zeige, daß

$$\delta\omega = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

ist.

3. Zeige, daß die Coableitung einer Differentialform $\omega := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq k} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$, $f_{i_1 \dots i_p} \in \Omega_0(U; \mathbb{R})$, gegeben ist durch

$$\delta\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq k} \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_{i_j}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

4. Betrachte die \mathbb{R} -lineare Abbildung $\Delta := d\delta + \delta d : \Omega_p(U; \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_p(U; \mathbb{R})$. Beweise:

- (a) $*\Delta = \Delta*$.
- (b) Für alle $f \in \Omega_0(U; \mathbb{R})$ gilt

$$\Delta f = \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Die Abbildung Δ heißt auch *Laplace-Beltrami Operator* auf U .