Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Brigitte Forster
Dipl. Math. Stefan Held
http://www-m6.ma.tum.de/Lehrstuhl/Distributionen_201112WS

Wintersemester 2011
Übungsblatt 3
Abgabetermin 10. November 2011

Distributionen

Definition 3 (Kreisförmige Mengen)**.** *Es sei X ein Vektorraum, $A \subseteq X$ heißt kreisförmig (englisch: balanced) genau denn, wenn*

$$\lambda A \subseteq A,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1.$$

Hausaufgabe 10 (Kreisförmige Nullumgebungen)
Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum.
Zeigen Sie:

a) *Es sei $V \subset X$ eine Nullumgebung. Dann existiert eine offene Nullumgebung U und ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$, so dass $\lambda U \subseteq V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \alpha$.*

b) *Jede Nullumgebung enthält eine kreisförmige Nullumgebung.*

c) *Jede konvexe Nullumgebung enthält eine kreisförmige konvexe Nullumgebung.*

6 Punkte

Hausaufgabe 11 (Topologiengleichheit)
Es sei $\big(X, (|\cdot|_k)_{k\in\mathbb{N}}\big)$ ein lokal-konvexer Vektorraum.
Zeigen Sie:

a) *Eine Metrik auf X wird definiert durch*

$$d(x,y) := \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} \frac{|x-y|_k}{1+|x-y|_k},\ \forall x, y \in X.$$

b) *Die Topologien, die von d und $(|\cdot|_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erzeugt werden, sind gleich.*

4 Punkte

Aufgabe 12
Es sei K ein kompakter topologischer Raum. Dann ist

$$C(K) := \{f : K \to \mathbb{C} :\ f \text{ ist stetig}\}$$

mit der Supremumsnorm $|f|_\infty := \sup_{x\in K} |f(x)|$ ein Banachraum. (2 Punkte)

Aufgabe 13 (Beispiel eines metrischen Raumes, der nicht lokalkonvex ist)
Es sei $0 < p < 1$. Wir betrachten die Räume

$$l^p(\mathbb{N}) := \{a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} : \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^p < \infty\}$$

mit der Metrik

$$d(a,b) := \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k - b_k|^p.$$

Dann besitzt 0_{l^p} keine Umgebungsbasis aus konvexen Mengen. (2 Punkte)

Bitte beachten Sie, dass dieses Aufgabenblatt spätestens am Donnerstag in der Vorlesung abzugeben ist.