Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Brigitte Forster
Dipl. Math. Stefan Held
http://www-m6.ma.tum.de/Lehrstuhl/Distributionen_201112WS

Wintersemester 2011
Übungsblatt 4
Abgabetermin 17. November 2011

Distributionen

Hausaufgabe 14 (Eine Familie von Halbnormen für $C^\infty(\mathbb{R}^n)$)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$, wobei $K_i \subset \Omega$ ineinander geschachtelte Kompakta sind $K_i \subset int(K_{i+1})$. Sei $N \in \mathbb{N}$. Durch

$$p_N(f) := \max\{|D^\alpha f(x)|,\ x \in K_N, |\alpha| \leq N\}$$

ist eine Familie von Halbnormen auf $C^\infty(\Omega)$ gegeben.
Zeigen Sie: Die Familie von Halbnormen $\{p_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ definiert eine metrisierbare lokal-konvexe Topologie auf $C^\infty(\Omega)$. 2 Punkte

Hausaufgabe 15 (Nullumgebungen in topologischen Vektorräumen)
Es sei V eine Nullumgebung in einem topologischen Vektorraum X.
Zeigen Sie

a) *Es sei $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ eine streng monotone steigende Folge für die $\lim_{i\to\infty} r_i = \infty$.*
   Dann gilt
$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$
b) *Jede kompakte Teilmenge K von V ist beschränkt.*
c) *Es sei $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ eine streng monoton fallende Folge, die gegen 0 konvergiert. Außerdem sei V beschränkt.*
   Dann ist $\{d_n V\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von 0_X.

6 Punkte

Hausaufgabe 16 (Beschränktheit von Cauchyfolgen)
Cauchyfolgen in lokal-konvexen topologischen Vektorräumen sind beschränkt. 2 Punkte

Aufgabe 17 (Normierbare topologische Hausdorffvektorräume)
Ein topologischer Hausdorffvektorraum X ist genau dann normierbar, wenn sein Ursprung eine konvexe beschränkte Umgebung besitzt. (2 Punkte)