Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Brigitte Forster
Dipl. Math. Stefan Held
http://www-m6.ma.tum.de/Lehrstuhl/Distributionen_201112WS

Wintersemester 2011
Übungsblatt 5
Abgabetermin 24. November 2011

Distributionen

Aufgabe 18 (Ein Hilfssatz)
Es sei X ein topologischer Vektorraum.

a) *Es sei W eine Nullumgebung in X. Zeigen Sie: Es gibt eine Nullumgebung U, die symmetrisch ist, das heißt $-U = U$, so dass $U + U \subset W$.*

b) *Es seien $C \subset X$ abgeschlossen und $K \subset X$ kompakt mit $C \cap K = \emptyset$. Zeigen Sie: Es gibt eine Nullumgebung V in X, so dass*

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset.$$

(2 Punkte)

Hausaufgabe 19 (Punkte in Hausdorffräumen sind abgeschlossen)
Sei X ein topologischer Vektorraum. Dann sind äquivalent:

a) *X ist Hausdorffsch.*

b) *Punkte in X sind abgeschlossen, das heißt $\{x\}$ ist abgeschlossen für alle $x \in X$.*

c) *Die Diagonale in $X \times X$ ist abgeschlossen, das heißt $\big\{(x, x),\, x \in X\big\}$ ist in $X \times X$ abgeschlossen.*

3 Punkte

Aufgabe 20 (Dimension von Hausdorffvektorräumen)

a) *Jeder lokal-kompakte Hausdorffvektorraum ist endlichdimensional.*

b) *Jeder lokal beschränkte Hausdorffvektorraum mit der Heine-Borel-Eigenschaft ist endlichdimensional.*

(2 Punkte)

Aufgabe 21 (Der gewichtete Mittelwert auf $L^p(\mathbb{R}^n)$)
Es sei $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Mollifier-Funktion aus der Vorlesung. Dann ist ein stetiger Operator auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$M_\varepsilon : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n),\ g \mapsto g_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^n} g(y) f_\varepsilon(\,\cdot\, - y) dy.$$

(2 Punkte)

Hausaufgabe 22 (Testfunktionen, die auf einem Kompaktum konstant sind)

a) *Es sei $A \subset G \subset \mathbb{R}^n$, wobei A kompakt und G ein Gebiet seien. (Insbesondere ist G also offen.)*

Zeigen Sie, dass $\exists \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n):\ 0 \leq \phi(x) \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ und

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in A, \\ 0 & \forall x \notin G. \end{cases}$$

b) *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.*

Zeigen Sie, dass $\exists \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n):\ \phi(x) = 1 \forall x \in K$.

3 Punkte

Hausaufgabe 23 (Beispiele für Distributionen)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zeige Sie, dass die folgenden Linearformen Distributionen darstellen:

a) *Es sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\omega)$.*

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx,\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

b) *Es sei $x \in \Omega$.*

$$\delta_x(\phi) := \phi(x),\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

4 Punkte