Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Brigitte Forster
Dipl. Math. Stefan Held
http://www-m6.ma.tum.de/Lehrstuhl/Distributionen_201112WS

Wintersemester 2011
Übungsblatt 7
Abgabetermin 9. Dezember 2011

Distributionen

Hausaufgabe 28 (Homogene Distributionen)
Für $r > 0$ bezeichne $D_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \to rx$ den Dilatationsoperator. Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $T \circ D_r$ die durch

$$T \circ D_r(\phi) := r^{-n} T(\phi \circ D_{r^{-1}}) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

definierte Distribution.
Zeigen Sie:

a) *Wenn T homogen vom Grad α ist, so ist $T \circ D_r = r^\alpha T\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

b) *Wenn T homogen vom Grad α ist und $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, so ist $\mathcal{D}^\beta T$ homogen vom Grad $\alpha - |\beta|$.*

c) *$D^\beta \delta_0$ ist homogen vom Grad $-|\beta| - n$.*

d) *Geben Sie ein Beispiel einer homogenen Distribution vom Grad -1 auf $\mathbb{R}$ an, welche keinen kompakten Träger hat.*

6 Punkte

Hausaufgabe 29
Es sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und $y > 0$. Definiere

$$\Big(\frac{d}{dy} T \circ D_y\Big)(\phi) := \frac{d}{dy}\big(T \circ D_y(\phi)\big),\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

wobei D_y den Dilatationsoperator bezeichne.
Zeigen Sie:

a) $\frac{\partial}{\partial y} \delta_0 \circ D_y = -\frac{1}{y^2} \delta_0$.

b) $\frac{\partial}{\partial y} \delta_0' \circ D_y = -\frac{2}{y^3} \delta_0'$.

2 Punkte

Hausaufgabe 30 (Abgebrochene Potenzfunktionen als Distributionen)

(i) *Sei*

$$x_+ = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachte x_+ als reguläre Distribution. Berechne $x \cdot x_+$.

(ii) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ein Gebiet und $k > -1$. Betrachte das lineare Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$*

$$x_+^k(\varphi) := \int_0^\infty x^k \varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dann ist x_+^k eine Distribution und es gilt $x \cdot x_+^k = x_+^{k+1}$.

2 Punkte

Definition 4 (Borel- und Radonmaß)**.** *Es sei X ein topologischer Vektorraum. Ein Maß μ heißt Borelmaß, genau dann wenn alle offenen Mengen in X bezüglich μ meßbar sind.*
Sei X desweiteren lokalkompakt. Ein Radonmaß auf X ist ein Borelmaß μ, das auf allen kompakten Teilmengen von X endlich ist.

Aufgabe 31 (Maße und Distributionen)
Eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ hat die Ordnung 0 genau dann, wenn sie durch ein Radonmaß gegeben wird. (2 Punkte)

Aufgabe 32 (Pseudofunktionen)
Betrachte das (im allgemeinen) divergente Integral

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\,dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

a) *Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{H(t)}{t} \cdot \varphi(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varphi(0) \ln r - \varphi(0) \ln \varepsilon + \int_\varepsilon^r \psi(t)\,dt\right],$$

wobei $\varphi(t) = \varphi(0) + t\psi(t)$ mit stetigem $\psi(t)$ und $r > 0$, so dass $\operatorname{supp} \varphi \subset clB_r(0)$.

b) *Die zugehörige Pseudofunktion entsteht durch Streichen des divergenten Terms $\varphi(0) \ln \varepsilon$:*

$$Pf\left(\frac{H(t)}{t}\right)(\varphi) := \int_0^r \psi(t)\,dt + \varphi(0) \ln r \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Dann ist $Pf\left(\frac{H(t)}{t}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

c) $\dfrac{\partial}{\partial y} Pf\left(\dfrac{H(t)}{t}\right) \circ D_y = -\dfrac{1}{y^2} Pf\left(\dfrac{H(t)}{t}\right) + \dfrac{1 - \ln y}{y^2}\delta_0.$

d) $Pf\left(\dfrac{H(t)}{t}\right) \circ D_a \neq Pf\left(\dfrac{H(at)}{at}\right).$

Wie üblich bezeichnet hier $H(x) := \begin{cases} 0 & \forall x < 0 \\ 1 & \forall x \geq 0 \end{cases}$ *die Heavisidefunktion.* (4 Punkte)