

Distributionen

Hausaufgabe 52 (Beispiel einer Fouriertransformierten)

Berechne die Fourier-Transformierte von $f(x) = \chi_{[-r,r]}(x)$, $r > 0$. In welchem Sinne gilt die Fourier-Inversion?

3 Punkte

Hausaufgabe 53 (Fortsetzung von Aufgabe 50)

Betrachte erneut die Folge aus Aufgabe 50:

$$T_1 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}), \quad T_k = T_{k-1} * T_1 \quad \forall k \geq 2.$$

(i) Berechne \widehat{T}_k , $k \geq 1$.

(ii) Bezeichne

$$f_k(x) = \sqrt{2\pi^k} \widehat{T}_k \left(\frac{x}{\sqrt{k}} \right), \quad k \geq 1.$$

Gegen welche Funktion konvergiert f_k für $k \rightarrow \infty$?

4 Punkte

Hausaufgabe 54 (Approximationssatz für Distributionen)

Zu jedem $T \in \mathcal{D}'$ gibt es eine Folge $h_k \in C^\infty$, $k \geq 0$, so dass die zugehörigen regulären Distributionen gegen T konvergieren:

$$h_k \rightarrow T \quad \text{in } \mathcal{D}' \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Insbesondere liegt C^∞ dicht in \mathcal{D}' .

3 Punkte

Aufgabe 55 (Inverse bezüglich der Faltung)

Finde die Inversen bezüglich der Faltung in \mathcal{D}' von

(i) $T = a_1\delta' + a_0\delta$,

(ii) $T = a_2\delta'' + a_0\delta$,

(iii) $T = (a_1\delta' + a_0\delta) * (b_1\delta' + b_0\delta)$,

(iv) $T = (a_1\delta' + a_0\delta)^{*m} = \underbrace{(a_1\delta' + a_0\delta) * \dots * (a_1\delta' + a_0\delta)}_{m+1 \text{ Faktoren}}$,

also $S \in \mathcal{D}'$ mit $S * T = T * S = \delta$.

Hierbei bezeichnen a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 Konstanten in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(4 Punkte)