

Zentrum Mathematik  
an der Technischen Universität München

# **Fourier-Analysis**

Vorlesungsskript

Prof. Dr. Brigitte Forster-Heinlein

**Vorläufige Fassung vom 29. Juli 2011**

# Vorwort

Dieses Skriptum ist konzipiert für den Modul **Fourier-Analysis MA 4064 (2+1 SWS)** im Hauptstudium der Mathematik und richtet sich besonders an Studenten der Technomathematik. Vorausgesetzt werden die Kenntnisse aus den Bereichen der Analysis, der Linearen Algebra und der Numerik aus den ersten beiden Studienjahren.

Hörer aus anderen Fachrichtungen sind ebenso herzlich willkommen. Zum Verständnis der Vorlesung genügen gute Kenntnisse in Höherer Mathematik 1 – 4.

Kenntnisse in Funktionalanalysis sowie Maß- und Integrationstheorie sind von Vorteil, aber nicht notwendig.

Ziel der Vorlesung ist die Vermittlung der verschiedenen Methoden, Funktionen oder Signale mit diskreten Transformationen in Reihen zu entwickeln und die Koeffizientenfolgen zur Interpretation heranzuziehen, bzw. mit kontinuierlichen Transformationen (Integraltransformationen) in besser zugängliche Funktionen abzubilden.

Zu dieser Vorlesung gehören Übungsaufgaben zur Vertiefung des Stoffs, die separat abgerufen werden können. Die Aufgaben sind für eine einstündige Übung konzipiert.

München, im Mai 2011      Brigitte Forster-Heinlein

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>i</b>
<b>1 Motivation</b>	<b>1</b>
1.1 Was ist ein Signal? . . . . .	2
1.2 Beispiel: Entrauschen eines periodischen Signals mittels Fourier-Reihen . . .	3
1.2.1 Begrifflichkeiten . . . . .	3
1.2.2 Entrauschen . . . . .	4
1.3 Inhalt der Vorlesung . . . . .	7
<b>2 Fourier-Reihen</b>	<b>8</b>
2.1 Zur Geschichte der Fourier-Reihen . . . . .	8
2.2 Orthonormalbasen und allgemeine Fourier-Reihen . . . . .	9
2.3 Fourier-Reihen im $L^2(\mathbb{T})$ . . . . .	10
2.4 Fourier-Reihen in $L^1(\mathbb{T})$ und ausgewählten Unterräumen . . . . .	13
2.4.1 Fourier-Koeffizienten und ihre Eigenschaften . . . . .	13
2.4.2 Norm-Konvergenz von Fourier-Reihen . . . . .	14
2.4.3 Approximation mit Fejér-Polynomen . . . . .	16
2.4.4 Regularität und Abklingverhalten . . . . .	17
2.4.5 Konvergenz-Sätze für die Fourier-Reihen Hölder-stetiger Funktionen	19
<b>3 Fourier-Integrale</b>	<b>23</b>
3.1 Fourier-Integral-Transformation auf $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	23
3.1.1 Definition und grundlegende Eigenschaften . . . . .	23
3.1.2 Regularität und Abklingverhalten . . . . .	25
3.1.3 Eindeutigkeitssatz und Inversionsformel . . . . .	27
3.2 Die Plancherel-Transformation . . . . .	31

<b>4</b>	<b>Fourier-Transformation für Schwartz-Funktionen und temperierte Distributionen</b>	<b>38</b>
4.1	Test-Funktionen und Schwartz-Funktionen . . . . .	39
4.2	Distributionen . . . . .	45
4.2.1	Der Raum der Distributionen und seine Topologie . . . . .	46
4.2.2	Rechnen mit Distributionen . . . . .	48
4.3	Temperierte Distributionen und die Fourier-Transformation . . . . .	50

# Kapitel 1

## Motivation

In den meisten technischen Verfahren werden Signale gemessen, um sie zur

- Überwachung des Verlaufs,
- Regelung,
- zur Qualitätssicherung,
- etc.

heranzuziehen.

Die gemessenen Signale müssen so aufbereitet werden, dass sie ausgewertet und interpretiert werden können.

Ziel: Signale (Funktionen in Banach- oder Hilbert-Räumen) zu transformieren, so dass das Bild der Transformation aussagekräftig und interpretierbar oder besser analysierbar ist, d. h.

- ungewünschte Störungen aus dem Signal gefiltert werden können,
- charakteristische System-Parameter geschätzt werden können, und
- die Transformation eine Darstellung der Funktion ist, die mehr Information liefert, als die Funktion an sich.

Einige wichtige (zunächst formale) Transformationen:

- Fourier-Transformation für periodische Funktionen:

$$f \mapsto \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Interpretation: Amplitude  $|\widehat{f}(n)|$  zur Frequenz  $n \in \mathbb{Z}$ . Diskretes Frequenz-Spektrum.

- Fourier-Integraltransformation auf  $\mathbb{R}$ :

$$f \mapsto \widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Interpretation: Amplitude  $|\widehat{f}(\omega)|$  zur Frequenz  $\omega \in \mathbb{R}$ . Kontinuierliches Frequenz-Spektrum.

- Wavelet-Transformation bezüglich Vergleichsmuster  $\psi$ :

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\psi((t-b)/a) dt, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}.$$

- Viele weitere Transformationen bezüglich „Mustern“, wie Curvelets, Shearlets, etc.
- Multivariate Varianten.
- Diskretisierte Varianten.

## 1.1 Was ist ein Signal?

Mit dem Begriff Signal bezeichnen wir Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , die wir gegebenenfalls genauer spezifizieren:

- $X = \mathbb{R}$  zeitkontinuierliches Signal
- $X = \mathbb{Z}$ ,  $X = \mathbb{N}$  zeitdiskret
- $X = [a, b]$  zeitbeschränkt
- $f(t) = f(t + kA)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$   $A$ -periodisch
- $f \in L^2(\mathbb{R})$  oder  $f \in l^2(\mathbb{Z})$  Signal von endlicher Energie
- $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  oder  $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$  beschränkt
- $f \in L^1(\mathbb{R})$  bzw.  $f \in l^1(\mathbb{Z})$  integrierbar bzw. summierbar.

## 1.2 Beispiel: Entauschen eines periodischen Signals mittels Fourier-Reihen

### 1.2.1 Begrifflichkeiten

Zunächst etwas zur Terminologie:

**Definition 1.2.1** Ein trigonometrisches Polynom ist ein Funktion der Form

$$P(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}.$$

Die Zahlen  $n$  heißen Frequenzen von  $P$ .

Die größte Zahl  $n$  mit  $|c_n| + |c_{-n}| \neq 0$  heißt Grad von  $P$ .

Für ein trigonometrisches Polynom  $P$  können die Koeffizienten  $c_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , berechnet werden durch die Formel

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t) e^{-int} dt,$$

denn

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0. \end{cases}$$

**Aufgabe 1.2.2** Nachprüfen.

**Definition 1.2.3** Eine trigonometrische Reihe ist ein Ausdruck der Form

$$S(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}.$$

Die Fourier-Reihe  $S(f)$  ist die trigonometrische Reihe

$$S(f)(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

mit

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

für geeignete  $f$ .

Die Reihe ist zunächst nur ein Symbol!

Im Laufe der Vorlesung klären wir, für welche  $f$

- die Koeffizienten  $\hat{f}(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , existieren und sinnvoll sind (Existenz, Wohldefiniertheit, Bijektivität), und
- wann und in welchem Sinne die Reihe  $S(f)$  konvergiert.

## 1.2.2 Entrauschen

Nun zum Beispiel:

**Gegeben:** Gemessenes periodisches Signal  $f$

$$\text{gemessenes Signal} = \text{Signal} + \text{Störungen}$$

mit  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ .

**Ziel:** Störungen aus dem Signal (in rot) entfernen.

**Idee:** Wir betrachten die Fourier-Reihe der Funktion.

$$f(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}, \quad t \in [-\pi, \pi],$$

d. h. bezüglich der Orthonormalbasis  $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  des  $L^2([-\pi, \pi])$ .

**Interpretation:** Koeffizienten  $c_n$  als Amplitude zur Kreisfrequenz  $n$ .

Fourier-Transformation:  $f \mapsto \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$

**Annahme:** Betragskleine Koeffizienten gehören zum Störsignal.

Um diese Anteile zu eliminieren, betrachten wir nur Fourier-Koeffizienten, deren Betrag größer als eine gewisse Schwelle (engl. Threshold) ist.

**Schwellenoperator:**

$$c_{n,\text{neu}} = \begin{cases} c_n & \text{falls } |c_n| > s_{\text{Threshold}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

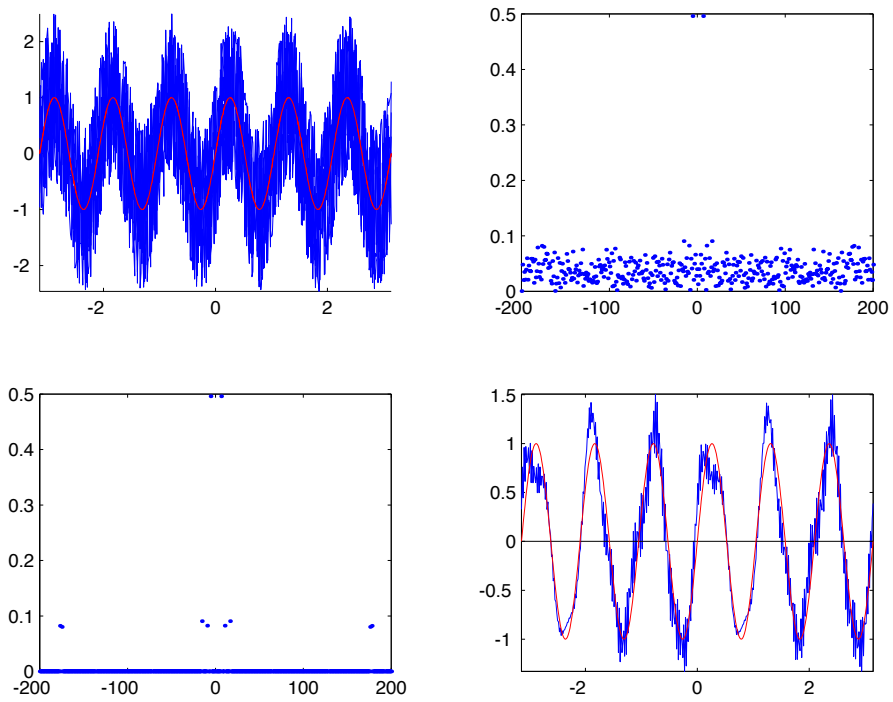
**Rekonstruktion:**

$$f_{\text{rek}}(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{n,\text{neu}} e^{int}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

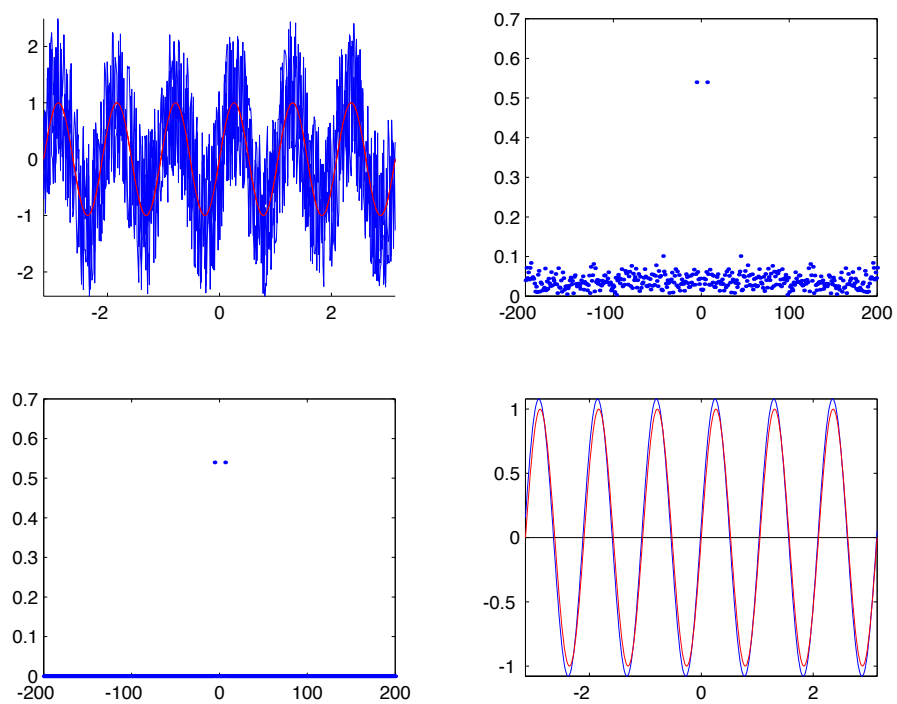
**Schwierigkeit in der Praxis:** Wahl eines geeigneten Schwellwerts!

Nicht für jede zu analysierende Funktion und jede Fragestellung ist die Exponentialfamilie  $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  eine geeignete Wahl zur Reihenentwicklung. Es gibt eine Vielzahl von Basen und Transformationen zur Signalanalyse. Sei folgen alle folgendem Schema:



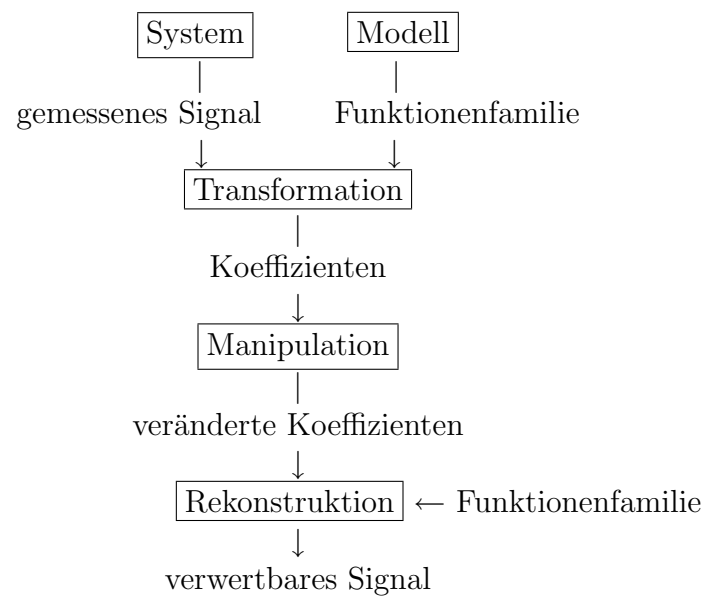


(a)



(b)

**Abbildung 1.1:** Thresholding eines verrauschten Signals im Frequenz-Bereich mit zwei unterschiedlichen Thresholds.



**Abbildung 1.2:** Die verschiedenen Methoden zur Signalanalyse verfahren alle nach demselben Schema. Funktionen werden Koeffizienten zugeordnet, die manipuliert werden. Anschließend wird aus diesen neuen Koeffizienten eine Ergebnisfunktion rekonstruiert.

## 1.3 Inhalt der Vorlesung

Wir werden in dieser Vorlesung Reihenentwicklungen und Integraltransformationen bezüglich verschiedener Funktionenfamilien und ihre Vor- und Nachteile untersuchen. Wir gehen wie folgt durch die Abschnitte:

- Motivation
- Fourier-Reihen
- Fourier-Integrale für  $L^1(\mathbb{R})$ ,  $L^2(\mathbb{R})$  und den Schwartz-Raum  $\mathcal{S}$ .
- Fourier-Transformation temperierter Distributionen
- Poisson-Summationsformel und Abtastsatz
- Anwendungen

# Kapitel 2

## Fourier-Reihen

### 2.1 Zur Geschichte der Fourier-Reihen

Die Fourier-Reihenentwicklung

$$f \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_f(n) e^{int}$$

einer Funktion  $f$  geht auf den **französischen Ingenieur und Mathematiker Jean Baptiste Joseph de Fourier (1768–1830)** zurück. Zuerst unschlüssig, ob er Priester oder Wissenschaftler werden wollte, entschied sich sein Lebensweg bei seiner Teilnahme an der der Französischen Revolution. Er wurde wissenschaftlicher Berater Napoleons bei der Invasion in Ägypten und später Präfekt vom Departement Isère. In dieser Zeit entwickelte er Exponentialreihen, die heute unter dem Namen Fourier-Reihen bekannt sind.

**Sein Ziel:** Wärmeleitungsgleichung lösen.

**Beispiel 2.1.1** Betrachte einen dünnen Kreisring, der die Länge  $2\pi$  besitze. Bezeichne  $\theta \in [0, 2\pi]$  den Ort auf dem Kreis, wobei  $\theta$  und  $\theta + 2\pi$  den selben Punkt bezeichnen. Sei  $f(t, \theta)$  die Temperaturfunktion zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  am Ort  $\theta$  im Kreisring. Dann beschreibt

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \\ f(0, \theta) = f_0(\theta) \end{cases} \quad \text{Wärmeleitungsgleichung}$$

die Temperaturverteilung im Kreisring.

Durch Nachrechnen lässt sich zeigen, dass die folgenden Funktionen Lösungen der obigen partiellen Differentialgleichung sind:

$$F_n(t, \theta) = e^{-n^2 t} \cos(n\theta), \quad n \geq 0,$$

und

$$G_n(t, \theta) = e^{-n^2 t} \sin(n\theta), \quad n > 0.$$

Also sind auch alle endlichen Linearkombinationen dieser Lösungen wieder Lösungen der Wärmeleitungsgleichung:

$$f(t, \theta) = \sum_n a_n F_n(t, \theta) + \sum_n b_n G_n(t, \theta),$$

wobei  $a_n, b_n \in \mathbb{C}$  Koeffizienten sind.

**Fouriers Idee:** Die Anfangsbedingung  $f_0$  in eine Exponentialreihe entwickeln, um davon abhängig die Koeffizienten in der Reihe zu erhalten:

$$f_0(\theta) \sim \sum_n a_n \cos(n\theta) + \sum_n b_n \sin(n\theta)$$

führt auf die Lösung

$$f(t, \theta) \sim \sum_n a_n e^{-n^2 t} \cos(n\theta) + \sum_n b_n e^{-n^2 t} \sin(n\theta).$$

### Zur Geschichte — Hintergrundinformationen:

Am 21. Dezember 1807 stellte er sein Memorandum „Über die Wärmeverteilung in Festkörpern“ der Französischen Akademie der Wissenschaften vor, mit dem Inhalt, dass eine beliebige Funktion auf einem Intervall dargestellt werden kann als unendliche Reihe über Sinus- und Cosinus-Funktionen.

Dieser Beitrag rief harte Kontroversen bei damaligen Mathematikern hervor. Die Reihe muss doch eine unendlich oft differenzierbare Funktion ergeben? Wie passen die Fourier-Reihen zu den bereits bekannten Taylor-Reihen? Wieso konvergieren in einigen Fällen Fourier-Reihen, wo die Konvergenz der Taylor-Reihe versagt?

Tatsächlich stehen Fourier- und Taylor-Reihen nicht im Widerspruch zueinander: Fourier-Reihen betrachten globale Eigenschaften, Taylor-Reihen lokale Eigenschaften einer Funktion.

Für seine Arbeit zur Wärmeleitungsgleichung erhielt Fourier 1811 einen Preis der Französischen Akademie der Wissenschaften, wenn auch aufgrund der Kontroversen mit nicht gerade positiver Begründung. 1817 wurde Fourier in die Akademie der Wissenschaften gewählt.

## 2.2 Orthonormalbasen und allgemeine Fourier-Reihen

**Ziel:** Fourier-Reihen aus dem allgemeinen Basis-Blickwinkel.

Sei  $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$  eine Orthonormalbasis des Hilbert-Raums  $H$ .

Dann besitzt jedes  $f \in H$  eine eindeutige und konvergente Fourier-Reihendarstellung

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Die Reihe konvergiert in der Norm von  $H$ .

Das Innenprodukt  $\langle f, e_n \rangle$  heißt  $n$ -ter Fourier-Koeffizient von  $f$ .

Mit dem Satz von Pythagoras folgt die Parseval-Gleichung (auch Energie-Satz (ing.))

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2. \quad (2.1)$$

Dies bedeutet, dass die lineare Abbildung

$$S : H \rightarrow l^2(\mathbb{N}), \quad f \mapsto \{\langle f, e_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$$

ein isometrischer Hilbert-Raum-Isomorphismus ist.  $S$  erhält daher auch Skalar-Produkte und es gilt die schwache Parseval-Gleichung

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \overline{\langle g, e_n \rangle} \quad \forall f, g \in H.$$

**Satz 2.2.1 (Besselsche Ungleichung)** Für jedes orthonormale System  $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

BEWEIS Zur Übung. Oder Dirk Werner, Funktionalanalysis. □

Daraus folgt sofort

**Lemma 2.2.2 (Riemann–Lebesgue-Lemma im Hilbert-Raum)**

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \langle f, e_n \rangle = 0 \quad \forall f \in H.$$

## 2.3 Fourier-Reihen im $L^2(\mathbb{T})$

Sei  $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi[ \}$ .  $\mathbb{T} = S^1$  ist eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ .

$\mathbb{T}$  ist eine kommutative Gruppe mit Multiplikation. Da die Multiplikation  $\cdot : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  stetig ist bezüglich der Topologie des  $\mathbb{R}^n$ , ist  $\mathbb{T}$  eine topologische Gruppe.

Jede Funktion  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  lässt sich in eindeutiger Weise identifizieren mit einer  $2\pi$ -periodischen Funktion  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\tilde{f}(t + 2\pi n) = \tilde{f}(t) = f(e^{it})$ , wobei  $t \in [0, 2\pi[$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Das Lebesgue-Maß von  $[0, 2\pi[$  wird transformiert auf  $\mathbb{T}$  durch

$$\int_{\mathbb{T}} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt = \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t) dt,$$

falls das Lebesgue-Integral existiert.

Wir bezeichnen mit  $L^2(\mathbb{T})$  den Raum aller komplex-wertigen, bezüglich des Lebesgue-Maßes quadrat-integrierbaren Funktionen auf  $\mathbb{T}$ . Versehen mit dem Innenprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(z) \overline{g(z)} dz \quad \text{für } f, g \in L^2(\mathbb{T}).$$

wird  $L^2(\mathbb{T})$  zum Hilbert-Raum.

(Bemerkung:  $L^p(\mathbb{T}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{T})/\mathcal{N}$ , wobei

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ Lebesgue-meßbar und } \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt < \infty.\}$$

und  $\mathcal{N} = \{f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}, f = 0 \text{ fast überall}\}$ ,  $1 \leq p < \infty$ .)

Im folgenden identifizieren wir  $\tilde{f}$  mit  $f$ .

Das komplexe trigonometrische System  $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ist eine Orthonormal-Basis von  $L^2(\mathbb{T})$ :

- Orthonormalität: Nachrechnen zur Übung.  
 $\Rightarrow$  Eindeutigkeit der Koeffizienten

- Vollständigkeit: Noch nachzuprüfen.

Zur Erinnerung: Eine Familie  $\{f_i\}_{i \in I} \subset X$  heißt vollständig im Banach-Raum  $X$ , wenn  $\text{span} \{f_i\}_{i \in I}$  dicht in  $X$  liegt. (Hierbei  $I$  Indexmenge.)

Insgesamt folgt: Jedes  $f \in L^2(\mathbb{T})$  besitzt eine eindeutige Fourier-Reihen-Entwicklung

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e^{in \cdot} \rangle e^{in \cdot} \quad \text{in } L^2(\mathbb{T}),$$

wobei

$$\langle f, e^{in \cdot} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Nach der Parseval-Gleichung gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, e^{in \cdot} \rangle|^2 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{T})$$

und die Abbildung

$$T : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}), \quad f \mapsto \{\langle f, e^{in \cdot} \rangle\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

ist ein Hilbert-Raum-Isomorphismus.

**Also zur Vollständigkeit:**

**Satz 2.3.1** Das trigonometrische System  $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ist vollständig in  $L^2(\mathbb{T})$ .

BEWEIS mit Hilfe des Satzes von Weierstraß

Annahme: Sei  $f \in L^2(\mathbb{T})$  eine integrierbare Funktion mit  $f \notin \overline{\text{span}\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}}$ . Dann gilt

$$\langle f, e^{in \cdot} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Wir zeigen, dass  $f = 0$  fast überall. Setze

$$g(t) = \int_{-\pi}^t f(u) du \quad \text{für } t \in [-\pi, \pi].$$

Dann ist  $g$  stetig.

Sei  $c \in \mathbb{C}$  konstant. Partielle Integration liefert

$$\int_{-\pi}^{\pi} (g(t) - c) e^{-int} dt = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{2.2}$$

Wähle  $c$ , so dass (2.2) auch für  $n = 0$  gilt und setze  $F(t) = g(t) - c$ . Dann ist  $F$  stetig auf  $[-\pi, \pi]$  und  $F(\pi) = F(-\pi) = -c$ . Nach dem Satz von Weierstraß gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine endliche trigonometrische Summe

$$T(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt},$$

so dass

$$|F(t) - T(t)| < \varepsilon \quad \text{für } |t| \leq \pi.$$

Damit folgt

$$\|F\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{F(t)} (F(t) - T(t)) dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t)| dt \leq_{\text{(CSU)}} \varepsilon \|F\|_2.$$

Daher  $\|F\|_2 \leq \varepsilon$  und da  $F$  beliebig war, gilt  $F = 0$ . Also ist  $g = c$  und daher  $f = 0$  fast überall. □

Zur Erinnerung (vgl. Heuser, Teil 2):

• **Satz von Stone-Weierstraß:**

Sei  $X$  eine kompakte Teilmenge eines normierten Raums  $E$ . Sei  $A$  eine abgeschlossene und punkttrennende Unteralgebra von  $C(X)$ . Enthalte  $A$  zusätzlich die Funktion 1.

Dann gilt  $A = C(X)$ . Hierbei ist  $C(X)$  versehen mit der Maximumsnorm.



- Sei  $F$  eine Familie reellwertiger Funktionen auf  $X$  heißt punktetrennend, wenn es zu je zwei Punkten  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  stets eine Funktion  $f \in F$  gibt mit  $f(x) \neq f(y)$ .

**Bemerkung 2.3.2** Analog zum Beweis von Satz 2.3.1 lässt sich die Vollständigkeit von  $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  in  $L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < \infty$ , zeigen.

Wir können diesen Abschnitt im folgenden Satz zusammenfassen:

**Satz 2.3.3** Das trigonometrische System  $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ist eine Orthonormalbasis des Hilbert-Raums  $L^2(\mathbb{T})$ .

## 2.4 Fourier-Reihen in $L^1(\mathbb{T})$ und ausgewählten Unterräumen

Wir wissen bereits, dass das trigonometrische System  $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  eine Orthonormalbasis des Hilbert-Raums  $L^2(\mathbb{T})$  ist. Wie verhält es sich mit den Banach-Räumen  $L^1(\mathbb{T})$  und  $C(\mathbb{T})$ ? Die Familie  $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  ist Teilmenge beider Räume, da aber

$$C(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$$

und alle diese Räume verschiedene Topologien haben, bleibt zu prüfen,

- ob die Familie in den beiden Banach-Räumen (und anderen Unterräumen von  $L^1(\mathbb{T})$ ) vollständig ist,
- in welchem Sinn die Reihen konvergieren,
- oder welche Einschränkungen/Modifikationen zur Konvergenz notwendig sind.

### 2.4.1 Fourier-Koeffizienten und ihre Eigenschaften

Wir betrachten  $f \in L^1(\mathbb{T})$  und bezeichnen mit

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt$$

den  $n$ -ten Fourier-Koeffizienten von  $f$ , sowie mit  $S(f)$  die formale Fourier-Reihe

$$S(f)(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int}.$$

**Satz 2.4.1 (Grundlegende Eigenschaften der Fourier-Koeffizienten)** Seien  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ . Dann gilt für  $\alpha \in \mathbb{C}$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(i) \widehat{(f+g)}(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n).$$

$$(ii) \widehat{(\alpha f)}(n) = \alpha \widehat{f}(n).$$

(iii) Bezeichnet  $\overline{f}(t) := \overline{f(t)}$  die konjugiert-komplexe Funktion von  $f$ , dann

$$\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}.$$

(iv) Bezeichne  $(L_\tau f)(t) = f(t - \tau)$ ,  $\tau \in \mathbb{T}$ , eine um  $\tau$  translierte Funktion. Dann gilt

$$\widehat{L_\tau f}(n) = \widehat{f}(n)e^{-in\tau}.$$

(v)

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt = \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

BEWEIS Übungsaufgabe. □

**Korollar 2.4.2** Sei  $f_j \in L^1(\mathbb{T})$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , und  $\|f_j - f_0\|_{L^1} \rightarrow 0$ . Dann konvergiert  $\widehat{f}_j(n) \rightarrow \widehat{f_0}(n)$  gleichmäßig.

BEWEIS Klar aus (v). □

## 2.4.2 Norm-Konvergenz von Fourier-Reihen

Zur Norm-Konvergenz der klassischen Fourier-Reihen in  $L^1(\mathbb{T})$  und  $C(\mathbb{T})$  gibt es leider Negativ-Aussagen:

**Satz 2.4.3** In  $L^1(\mathbb{T})$  gilt die Normkonvergenz der Fourier-Reihen **nicht!**

D.h. es gibt  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , so dass  $S_n(f)$  für  $n \rightarrow \infty$  nicht in  $L^1(\mathbb{T})$  konvergiert.

Der Grund ist, dass die Operatornormen der Partialreihen nicht beschränkt sind.

Die Beschränktheit würde mit dieser Folgerung aus dem Satz von Banach-Steinhaus die Normkonvergenz liefern:

**Satz 2.4.4** Sei  $B$  Banach-Raum mit Norm  $\|\cdot\|$ .

Sei  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stetiger linearer Operatoren von  $B$  in  $B$  (d.h.  $T_n \in \mathcal{B}(B)$ ).

Für eine dichte Teilmenge  $M \subset B$  gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f) - f\| = 0 \quad \forall f \in M.$$

Dann sind äquivalent:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f) - f\| = 0 \quad \forall f \in B$$

(ii) Es gibt  $C \geq 0$  mit  $\|T_n(f)\| \leq C\|f\|$  für alle  $f \in B$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Beweis in der Übung.

**Aufgabe 2.4.5** Informieren Sie sich in der Literatur zur Funktionalanalysis über den Satz von Banach-Steinhaus.

Welche wesentlichen Voraussetzungen nennt er?

Auf Basis welchen Ergebnisses wird er gefolgert?

Tatsächlich gilt allerdings für die Fourier-Reihen in  $L^1(\mathbb{T})$

$$\|S_n\|_{op:L^1 \rightarrow L^1} = L_n > \frac{4}{\pi^2} \ln n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die  $L_n$  heißen **Lebesgue-Konstanten**.

Für die Herleitung siehe Übung.

Ähnlich im Raum  $C(\mathbb{T})$ :

**Proposition 2.4.6** Es gilt

$$\|S_n\|_{op:C(\mathbb{T}) \rightarrow C(\mathbb{T})} \geq L_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt wie eben:

**Satz 2.4.7** Es existiert eine stetige Funktion  $f \in C(\mathbb{T})$ , so dass  $S_n(f)$  nicht gleichmäßig konvergiert.

Es gilt sogar:

**Satz 2.4.8** Sei  $t_0 \in \mathbb{T}$ .

Dann gibt es ein  $f \in C(\mathbb{T})$ , so dass  $S_n(f)(t_0)$  nicht konvergiert.

Diese negativen Aussagen waren ein Schock für die Mathematiker im 19. Jahrhundert.

Aber: Marcel Riesz konnte zeigen

**Satz 2.4.9** Sei  $1 < p < \infty$ . Dann gibt es eine Konstante  $C > 0$ , so dass gilt

$$\|S_n\|_{op:L^p(\mathbb{T}) \rightarrow L^p(\mathbb{T})} < C.$$

Inbesondere konvergieren Fourier-Reihen in der  $L^p(\mathbb{T})$ -Norm,  $1 < p < \infty$ .

Beweis über die sog. Hilbert-Transformation. Viele Zutaten aus der Approximationstheorie und der Funktionalanalysis.

Auch die punktweise Konvergenz und die Konvergenz fast überall sind nicht garantiert und benötigen teilweise starke Voraussetzungen. Für etliche Funktionenräume sind diese Fragen noch offen.

Letzter großer Durchbruch: Lennart Carlson (\*1928 in Stockholm),

- 1965: Die Fourier-Reihen von  $L^2$ -Funktionen konvergieren fast überall.
- 2006: Abel-Preis der Norwegischen Akademie der Wissenschaften

Wie behebt man diese Konvergenz-Probleme?

- Durch Konvergenzbeschleuniger, sog. Summationskerne und approximative Einsen.
- Durch Rückzug auf geeignete Teilräume des  $L^1(\mathbb{T})$ .

### 2.4.3 Approximation mit Fejér-Polynomen

**Definition 2.4.10** Sei  $f \in L^1(\mathbb{T})$ .

$$\sigma_n(f) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \widehat{f}(k) e^{ik\bullet}$$

heißt Fejér-Polynom,  $n \in \mathbb{N}$ .

(Lipót Fejér (born Leopold Weiss), 1880-1959, Ungarischer Mathematiker)

Mit diesem Kern gilt Norm-Konvergenz in  $L^1(\mathbb{T})$ , in  $C(\mathbb{T})$  und vielen anderen sogenannten homogenen Banachräumen, eine speziellen Klasse von Teilräumen des  $L^1(\mathbb{T})$ :

**Satz 2.4.11** Es gilt für alle  $f \in B$  mit  $B = L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < \infty$ , oder  $B = C(\mathbb{T})$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \widehat{f}(k) e^{ik\bullet} \right\|_B = 0.$$

**Bemerkung 2.4.12** Die trigonometrischen Polynome liegen dicht in  $L^1(\mathbb{T})$  und  $C(\mathbb{T})$ . Für  $C(\mathbb{T})$  entspricht dies dem Satz von Weierstraß.

**Satz 2.4.13 (Eindeutigkeitssatz)** Sei  $f \in L^1(\mathbb{T})$  mit  $\widehat{f}(n) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Dann ist  $f \equiv 0$  in  $L^1(\mathbb{T})$ .

BEWEIS Da  $f$  durch die Polynome  $\sum_{k=-n}^n (1 - \frac{|k|}{n+1}) \widehat{f}(k) e^{ik\bullet}$  approximiert wird, und nach Voraussetzung  $\widehat{f}(k) = 0$  für alle  $k$ , folgt  $f \equiv 0$ .  $\square$

**Satz 2.4.14 (Riemann-Lebesgue-Lemma)** Sei  $f \in L^1(\mathbb{T})$ .

Dann  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \widehat{f}(n) = 0$ .

BEWEIS Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es ein trigonometrisches Polynom  $P$  auf  $[-\pi, \pi]$  mit  $\|f - P\|_1 < \varepsilon$ . Für  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $|n| > \text{grad}P$  gilt

$$|\widehat{f}(n)| = |(f - P)\widehat{\phantom{f}}(n)| \leq \|f - P\|_1 < \varepsilon.$$

$\square$

**Aufgabe 2.4.15** Zeichnen Sie die Folgen der Partialreihen  $S_n(f)$  und  $\sigma_n(f)$  für verschiedene  $f$  und eine geeignete Index-Folge  $n \in I$ .

Wählen Sie Sprungfunktionen, oder andere Funktionen mit Unstetigkeitsstellen, Funktionen mit Knicken, d.h. Unstetigkeiten in der Ableitung.

Zeichnen Sie zusätzlich den Betrag der Fourier-Koeffizienten und jenen der gewichteten Fourier-Koeffizienten.

Was beobachten Sie? Dokumentieren Sie die Befunde.

## 2.4.4 Regularität und Abklingverhalten

**Satz 2.4.16** (i) Sei  $f \in L^1(\mathbb{T})$  und  $\widehat{f}(0) = 0$  (d.h.,  $f$  ist Mittelwert-frei:  $\int_{\mathbb{T}} f(t) dt = 0$ ).

Sei  $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$  für alle  $t \in [0, 2\pi]$ .

Dann ist  $F$  stetig,  $2\pi$ -periodisch und es gilt :

$$\widehat{F}(n) = \frac{1}{in} \widehat{f}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

(ii) Sei  $f$  eine differenzierbare Funktion auf  $\mathbb{T}$ . Gilt  $f' \in L^1(\mathbb{T})$ , so gilt

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{in} \widehat{f}'(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

BEWEIS Die Stetigkeit von  $F$  (sogar absolute Stetigkeit) ist offensichtlich, da Integral. Die Periodizität folgt aus

$$F(t + 2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(\tau) d\tau = 2\pi \widehat{f}(0) = 0.$$

Mit partieller Integration gilt

$$\begin{aligned} \widehat{F}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t)e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ F(t) \frac{1}{-in} e^{-int} \right]_{t=0}^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F'(t) \frac{e^{-int}}{-in} dt \\ &= \frac{1}{in} \widehat{f}(n). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Zu (ii): Zu prüfen bleibt  $\widehat{f}'(0) = 0$ . Dies gilt aufgrund der  $2\pi$ -Periodizität:

$$\widehat{f}'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) dt = f(2\pi) - f(0) = 0.$$

□

**Korollar 2.4.17** Ist  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  zweimal stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\widehat{f} \in l^1(\mathbb{Z}), \quad \text{d.h.,} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty.$$

BEWEIS

$$|\widehat{f}(n)| = \left| \frac{\widehat{f}'(n)}{in} \right| = \left| \frac{\widehat{f}''(n)}{-n^2} \right| < \frac{M}{n^2}.$$

□

**Aufgabe 2.4.18** Formuliere folgende Faustregel mathematisch und beweise sie:

Je glatter die Funktion, um so schneller fallen die Fourier-Koeffizienten.

Es gilt auch eine umgekehrte Aussage (siehe Katznelson S. 26 und S. 30):

**Satz 2.4.19** (i) Wenn  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| |n|^l < \infty$ , dann ist  $f$   $l$ -mal stetig differenzierbar.

(ii) Sei  $k > 2$  und gelte  $\widehat{f}(n) = \mathcal{O}(|n|^{-k})$ . Wenn  $l = k - 2$  für  $k \in \mathbb{N}$  oder  $l = \lfloor k \rfloor - 1$  falls  $k \notin \mathbb{N}$ , dann ist  $f$   $l$ -mal stetig differenzierbar.

(iii) Sei  $f \in L^1(\mathbb{T})$  und  $\widehat{f}(n) = \mathcal{O}(|n|^{-k})$  für  $|k| \rightarrow \infty$ . Dann ist  $f$   $m$ -mal differenzierbar mit  $f^{(m)} \in L^2(\mathbb{T})$ , wenn  $k - m > \frac{1}{2}$ .

BEWEIS -Skizze

Die formale Fourier-Reihe von  $f^{(l)}$  ist  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (in)^{(l)} \widehat{f}(n)$ . Sie konvergiert nach den Voraussetzungen absolut, resp. in  $L^2(\mathbb{T})$ . Die Approximation von  $f^{(l)}$  durch die Reihe folgt mit Satz 2.4.11. □

Dieser Sachverhalt wird in der Signal- und Bildanalyse zur Schätzung der Glattheit einer Funktion genutzt.

**Aufgabe 2.4.20** Führen Sie den Beweis von Satz 2.4.19 aus.

## 2.4.5 Konvergenz-Sätze für die Fourier-Reihen Hölder-stetiger Funktionen

(Siehe Katznelson, An introduction to harmonic analysis, I.6. )

**Definition 2.4.21** Der Hölder-Raum  $C^{k,\alpha}(\mathbb{T})$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , ist der Raum jener Funktionen  $f \in C^k(\mathbb{T})$ , deren  $k$ -te Ableitungen Hölder-stetig mit Exponent  $\alpha$  sind: Es gibt eine positive Konstante  $C$  mit

$$|f^{(k)}(s) - f^{(k)}(t)| \leq C|s - t|^\alpha \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{T}.$$

**Bemerkungen 2.4.22** • Hölder-Räume benannt nach Otto Hölder (1859 (Stuttgart) – 1937 (Leipzig)). U.a. auch Hölder-Ungleichung.

- Für  $\alpha = 1$  Lipschitz-Bedingung. Daher werden die Räume für  $k = 0$  oft auch mit  $\text{Lip}_\alpha(\mathbb{T}) = C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$  bezeichnet.
- Zum Beispiel ist  $f(x) = \sqrt{x}$  auf  $[0, 2\pi]$  nicht Lipschitz-stetig, aber Hölder-stetig für  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ .
- Die Hölder-Räume  $C^{k,\alpha}(\Omega)$  können, je nach Offen- oder Abgeschlossenheit des Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , mit einer Seminorm oder sogar einer Norm versehen werden.
- Wir betrachten im Folgenden nur  $\text{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$ , versehen mit der Norm

$$\|f\|_{\text{Lip}_\alpha} = \|f\|_\infty + \sup_{t \in \mathbb{T}, h \neq 0} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^\alpha}.$$

**Aufgabe 2.4.23** Zeigen Sie, dass  $\|f\|_{\text{Lip}_\alpha}$  eine Norm ist.

**Satz 2.4.24 (Satz von Bernstein)** Sei  $f \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$  für ein  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Dann ist die Fourier-Reihe von  $f$  absolut summierbar und es gilt:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \leq c_\alpha \|f\|_{\text{Lip}_\alpha},$$

wobei die positive Konstante nur von  $\alpha$  abhängt.

BEWEIS Formale Fourier-Reihe

$$f(t-h) - f(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{-inh} - 1) \hat{f}(n) e^{int}.$$

Wähle  $h = \frac{2\pi}{3 \cdot 2^m}$  und  $2^m \leq n \leq 2^{m+1}$ .

Dann gilt  $|e^{-inh} - 1| \geq \sqrt{3}$ . Folglich

$$\begin{aligned} \sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |\widehat{f}(n)|^2 &\leq \sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |e^{inh} - 1|^2 |\widehat{f}(n)|^2 \\ &= \|f(\bullet - h) - f\|_2^2 \leq \|f(\bullet - h) - f\|_\infty^2 \\ &\leq \underbrace{\left(\frac{2\pi}{3 \cdot 2^m}\right)^{2\alpha}}_{=(h^2)^\alpha} \|f\|_{\text{Lip}_\alpha}^2. \end{aligned}$$

Die linke Seite der Gleichung hat höchstens  $2^{m+1}$  Terme. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert:

$$\sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |\widehat{f}(n)| \cdot 1 \leq 2^{(m+1)/2} \left(\frac{2\pi}{3 \cdot 2^m}\right)^\alpha \|f\|_{\text{Lip}_\alpha}.$$

Da  $\alpha > \frac{1}{2}$  können wir links und rechts über  $m = 0, 1, 2, \dots$  summieren.

Da  $|\widehat{f}(0)| \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|_{\text{Lip}_\alpha}$  erhalten wir die Behauptung. □

**Definition 2.4.25** Sei  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion. Dann bezeichnet

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, f) = \sup\{|f(x_2) - f(x_1)| \mid x_1, x_2 \in \mathbb{T}, |x_2 - x_1| < \delta\}$$

den Stetigkeitsmodul von  $f$ .

**Bemerkung 2.4.26** •  $f$  stetig  $\iff \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$ .

- Falls für gewisses  $\alpha > 0$  gilt  $\omega(\delta) \leq C \cdot \delta^\alpha$  mit einer positiven Konstante  $C$ , die unabhängig von  $\delta$  ist, dann gilt  $f \in \text{Lip}_\alpha$ .
- Nur der Fall  $0 < \alpha \leq 1$  ist interessant. Wenn  $\alpha > 1$ , dann  $\frac{\omega(\delta)}{\delta} \rightarrow 0$  für  $\delta \rightarrow 0$ . D.h.,  $f'$  existiert und verschwindet, also  $f = \text{const}$ .

**Satz 2.4.27** Wenn  $f$  von beschränkter Variation ist, d.h.

$$V = \sup_Z \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty$$

über alle Zerlegungen  $Z$  der Form

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2\pi,$$

und  $f \in \text{Lip}_\alpha$  für ein  $\alpha > 0$ , dann konvergiert  $S(f)$  absolut.



BEWEIS

1. Schritt: Zunächst eine Vorberechnung:

Sei  $N \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2N} \left( f\left(x + \frac{k\pi}{N}\right) - f\left(x + \frac{(k+1)\pi}{N}\right) \right)^2 \\ & \leq \omega\left(\frac{\pi}{N}\right) \sum_{k=1}^{2N} \left| f\left(x + \frac{k\pi}{N}\right) - f\left(x + \frac{(k+1)\pi}{N}\right) \right| \\ & \leq \omega\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot V. \end{aligned}$$

Integration über  $[0, 2\pi]$  liefert

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{2N} \left( f\left(x + \frac{k\pi}{N}\right) - f\left(x + \frac{(k+1)\pi}{N}\right) \right)^2 dx \leq 2\pi\omega\left(\frac{\pi}{N}\right) V.$$

Aufgrund der Translationsinvarianz des Lebesgue-Integrals gilt, dass die linke Seite LS folgendes erfüllt:

$$\begin{aligned} \text{LS} &= \sum_{k=1}^{2N} \int_0^{2\pi} \left( f\left(x + \frac{\pi}{2N}\right) - f\left(x - \frac{\pi}{2N}\right) \right)^2 dx \\ &= 2N \int_0^{2\pi} \left( f\left(x + \frac{\pi}{2N}\right) - f\left(x - \frac{\pi}{2N}\right) \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\int_0^{2\pi} \left( f\left(x + \frac{\pi}{2N}\right) - f\left(x - \frac{\pi}{2N}\right) \right)^2 dx \leq \frac{\pi}{N}\omega\left(\frac{\pi}{N}\right) V.$$

2. Schritt: Abschätzung der absoluten Konvergenz der Fourier-Reihe:

Sei  $h = \frac{\pi}{2^{m+1}}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für  $2^{m-1} < |n| \leq 2^m$

$$|e^{inh} - e^{-inh}| = 2|\sin nh| = 2\left|\sin n\frac{\pi}{2^{m+1}}\right|$$

und weiter

$$1 < \sqrt{2} = 2\frac{1}{2}\sqrt{2} \leq 2\left|\sin n\frac{\pi}{2^{m+1}}\right| \leq 2.$$

Hiermit gilt nun

$$\begin{aligned} \sum_{2^{m-1} < |n| \leq 2^m} |\widehat{f}(n)|^2 &\leq \sum_{2^{m-1} < |n| \leq 2^m} |e^{inh} - e^{-inh}|^2 |\widehat{f}(n)|^2 \\ &= \sum_{2^{m-1} < |n| \leq 2^m} |(f(\bullet + h) - f(\bullet - h))^\wedge(n)|^2 \\ &\leq \|f(\bullet + h) - f(\bullet - h)\|_2^2. \end{aligned}$$

Für die absolute Konvergenz der Fourier-Reihe folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \sum_{2^{m-1} < |n| \leq 2^m} |\widehat{f}(n)| \cdot 1 &\leq 2^{\frac{m-1}{2}} \left( \sum_{2^{m-1} < |n| \leq 2^m} |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2^{\frac{m-1}{2}} \|f(\bullet + h) - f(\bullet - h)\|_2. \end{aligned}$$

3. Schritt: Abschätzung der gesamten Reihe und der Stetigkeitsmoduln

Setze  $N = 2^m$  und  $h = \frac{\pi}{2N} = \frac{\pi}{2 \cdot 2^m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| = |\widehat{f}(0)| + |\widehat{f}(1)| + |\widehat{f}(-1)| + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{2^{m-1} < |n| \leq 2^m} |\widehat{f}(n)|.$$

Für die Reihe können wir mit Schritt 1 und Schritt 2 abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{2^{m-1} < |n| \leq 2^m} |\widehat{f}(n)| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{(m-1)/2} \|f(\bullet + h) - f(\bullet - h)\|_2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} 2^{(m-1)/2} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x + \frac{\pi}{2N}) - f(x - \frac{\pi}{2N})|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{(m-1)/2} \left( \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{N} \omega\left(\frac{\pi}{N}\right) V \right)^{1/2} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} 2^{(m-1)/2} \left( \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{2^m} \omega\left(\frac{\pi}{2^m}\right) V \right)^{1/2} \\ &= (V/8)^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \omega\left(\frac{\pi}{2^m}\right)^{1/2} \\ &\leq (V/8)^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} C 2^{-m\alpha/2} < \infty. \end{aligned}$$

□

# Kapitel 3

## Fourier-Integrale

### 3.1 Fourier-Integral-Transformation auf $L^1(\mathbb{R})$

**Modell:**

Zeitkontinuierliche integrierbare Funktionen  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

#### 3.1.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

**Definition 3.1.1** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Die *Fourier-Transformierte*  $\mathcal{F}(f)$  von  $f$  ist definiert durch

$$\mathcal{F}(f)(a) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-iax} dx \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

**Satz 3.1.2** Seien  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $a \in \mathbb{R}$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

(i)  $\mathcal{F}$  ist linear:

$$\mathcal{F}(\lambda f + g)(a) = \lambda \mathcal{F}(f)(a) + \mathcal{F}(g)(a).$$

(ii) Bezeichne  $\overline{f}(x) := \overline{f(x)}$ . Dann  $\mathcal{F}(\overline{f})(a) = \overline{\mathcal{F}(-a)}$ .

(iii) Bezeichne  $L_y f(x) := f(x - y)$  für  $y \in \mathbb{R}$ . Dann  $\mathcal{F}(L_y f)(a) = e^{-iya} \mathcal{F}(f)(a)$ .

(iv)  $|\mathcal{F}(f)(a)| \leq \|f\|_1$

(v) Bezeichne  $f_\lambda(x) := \lambda f(\lambda x)$  für  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann ist  $\mathcal{F}(f_\lambda)(a) = \mathcal{F}(f)\left(\frac{a}{\lambda}\right)$ .

**BEWEIS** Zu (v):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f_\lambda)(a) &= \int_{\mathbb{R}} f_\lambda(x)e^{-iax} dx = \lambda \int_{\mathbb{R}} f(\lambda x)e^{-iax} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\frac{a}{\lambda}} dx = \mathcal{F}(f)\left(\frac{a}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 3.1.3** Für höhere Dimensionen und  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $n \geq 1$ , definiert man für  $a \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(f)(a) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\langle x, a \rangle} dx.$$

**Satz 3.1.4** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Dann ist die Funktion  $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt und gleichmäßig stetig.

BEWEIS Die Beschränktheit folgt aus Satz 3.1.2.

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$\mathcal{F}(f)(a+b) - \mathcal{F}(f)(a) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iax} (e^{-ibx} - 1) dx,$$

also

$$|\mathcal{F}(f)(a+b) - \mathcal{F}(f)(a)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \cdot |e^{-ibx} - 1| dx.$$

**Ziel: Majorisierte Konvergenz**

**1. Punktweise Konvergenz des Integranden für alle  $x \in \mathbb{R}$**

Da  $f(x)(e^{-ibx} - 1) \rightarrow 0$  für  $b \rightarrow 0$  bei festem  $x \in \mathbb{R}$

**2. Integrierbare Majorante**

und da

$$|f(x)| \cdot |e^{-ibx} - 1| \leq 2|f(x)|$$

folgt mit dem Satz von der Majorisierten Konvergenz:

$$\lim_{b \rightarrow 0} |\mathcal{F}(f)(a+b) - \mathcal{F}(f)(a)| \rightarrow 0$$

für  $b \rightarrow 0$  unabhängig von  $a$ . □

**Bemerkung 3.1.5** Bei der Fourier-Transformation in  $L^1(\mathbb{T})$  betrachteten wir ein diskretes Frequenzspektrum  $n \in \mathbb{Z}$ . Hier betrachten wir ein kontinuierliches Frequenzspektrum  $a \in \mathbb{R}$ .

Ganz analog zur Faltung in  $L^1(\mathbb{T})$  kann auch der Banach-Raum  $L^1(\mathbb{R})$  mit einer Faltungsstruktur versehen werden und zur Banach-Algebra werden:

**Satz 3.1.6** Sei  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Für fast alle  $x \in \mathbb{R}$  ist die Abbildung  $y \mapsto f(x-y) \cdot g(y)$  absolut integrierbar. Bezeichne

$$h(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy.$$

Dann gilt:  $h \in L^1(\mathbb{R})$  sowie

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}(h)(a) = \mathcal{F}(f)(a) \cdot \mathcal{F}(g)(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS Analog zur Faltung in  $L^1(\mathbb{T})$ , siehe Übung.  $\square$

**Definition 3.1.7** Seien  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Die Funktion  $h$  aus Satz 3.1.6 bezeichnet man mit  $f * g$  und heißt *Faltung* von  $f$  und  $g$ .

**Bemerkung 3.1.8** Mit  $*$  wird  $L^1(\mathbb{R})$  zu einer Banach-Algebra ohne Eins.

Die Fourier-Transformation ist ein Algebra-Homomorphismus in  $C_u^b(\mathbb{R})$ , d. h. der Banach-Algebra mit punktweiser Multiplikation aller gleichmäßig stetigen (u) beschränkten (b) Funktionen auf  $\mathbb{R}$ .

### 3.1.2 Regularität und Abklingverhalten

**Satz 3.1.9** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

(i) Sei

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \chi_{] -\infty, x]} dy \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Wenn  $F \in L^1(\mathbb{R})$ , dann gilt

$$\mathcal{F}(F)(a) = \frac{1}{ia} \mathcal{F}(f)(a)$$

für alle  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(ii) Falls  $f$  eine auf  $\mathbb{R}$  differenzierbare Funktion ist und  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ , dann

$$\mathcal{F}(f)(a) = \frac{1}{ia} \mathcal{F}(f')(a)$$

für alle  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

BEWEIS Es genügt, (i) zu zeigen. Wir wissen,  $F'(x) = f(x)$  gilt für fast alle  $x \in \mathbb{R}$ . Partielle Integration und der Satz über die Majorisierte Konvergenz liefern

$$\mathcal{F}(F)(a) = \lim_{A \rightarrow \infty} F(x) \frac{1}{-ia} e^{-iax} \Big|_{x=-A}^A + \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{ia} e^{-iax} dx.$$

Offensichtlich gilt  $\lim_{A \rightarrow -\infty} F(A) = 0$ . Da  $f$  integrierbar ist, existiert  $\lim_{A \rightarrow \infty} F(A)$  und ist endlich, denn

$$\lim_{A \rightarrow \infty} F(A) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx < \infty$$

existiert.

Wäre nun  $\lim_{A \rightarrow \infty} F(A) = \alpha \neq 0$ . Dann gäbe es  $A_0 > 0$  mit  $|F(A)| \geq \frac{|\alpha|}{2} > 0$  für alle  $A > A_0$ . Dies wäre ein Widerspruch zu  $F \in L^1(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Satz 3.1.10** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Bezeichne  $g(x) := xf(x)$ . Sei  $g \in L^1(\mathbb{R})$ . Dann gilt für alle  $a \in \mathbb{R}$ :

$\mathcal{F}(f)$  ist differenzierbar und  $(\mathcal{F}(f))'(a) = \mathcal{F}(-ig)(a)$ .

BEWEIS Wir betrachten

$$\frac{\mathcal{F}(f)(a+h) - \mathcal{F}(f)(a)}{h} = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iax} \frac{e^{-ihx} - 1}{h} dx.$$

Es gilt

$$\left| \frac{e^{-ihx} - 1}{h} \right| \leq |x|,$$

sowie

$$\frac{e^{-ihx} - 1}{h} \rightarrow -ix \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Da  $g(x) = xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$  absolut integrierbar ist, folgt mit dem Satz von der Majorisier-ten Konvergenz

$$(\mathcal{F}(f))'(a) = -i \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iax} x dx = -i\mathcal{F}(g)(a).$$

□

Mit vollständiger Induktion folgt:

**Korollar 3.1.11** Ist  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , so dass  $x \mapsto x^n f(x) =: g(x)$  absolut integrierbar ist für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\mathcal{F}(f)$   $n$ -mal differenzierbar und

$$(\mathcal{F}(f))^{(n)}(a) = (i)^n \mathcal{F}(g)(a) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere gilt für  $a = 0$ :

$$(\mathcal{F}(f))^{(n)}(0) = (-i)^n m_n,$$

wobei

$$m_n := \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx$$

das  $n$ -te Moment von  $f$  ist.

**Korollar 3.1.12** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  2-mal stetig differenzierbar und habe  $f$  kompakten Träger.

Dann gilt  $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ .

BEWEIS Da  $f$  kompakten Träger hat und in  $C^2$  liegt, haben auch  $f'$  und  $f''$  kompakten Träger. Satz 3.1.9 ergibt

$$|\mathcal{F}(f)(a)| = \left| \frac{\mathcal{F}(f'')(a)}{a^2} \right| \leq \frac{1}{a^2} \|f\|_1.$$

Spalte  $\mathbb{R}$  auf in  $[-1, 1]$  und  $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ . Auf  $[-1, 1]$  ist  $\mathcal{F}(f)$  als stetige Funktion auf einem Kompaktum beschränkt, und damit integrierbar. Auf  $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$  ist  $\mathcal{F}(f)(a)$  ist integrierbar, da es wie  $\frac{1}{a^2}$  fällt.

Damit folgt  $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ . □

### 3.1.3 Eindeutigkeitssatz und Inversionsformel

Auch im kontinuierlichen Fall macht man sich die Faltung mit Kernen zunutze:

**Satz 3.1.13** Seien  $f, k \in L^1(\mathbb{R})$  und es gelte

$$k(x) = \int_{\mathbb{R}} K(a)e^{iax} da \quad \text{mit } K \in L^1(\mathbb{R}).$$

Dann gilt

$$k * f(x) = \int_{\mathbb{R}} K(a)\mathcal{F}(f)(a)e^{iax} da.$$

BEWEIS Es gilt fast überall

$$k * f(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K(a)e^{iax} e^{-ia y} f(y) da dy.$$

Der Satz von Fubini liefert

$$k * f(x) = \int_{\mathbb{R}} K(a)\mathcal{F}(f)(a)e^{iax} da.$$

□

**Beispiel 3.1.14 Fejér-Kern:**

$$F(x) := \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{x/2} \right)^2, \quad F_\lambda(x) = \lambda F(\lambda x), \quad \lambda \in ]0, \infty[.$$

Bezeichne

$$\Delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(1 - |x|) & \text{für } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt für  $a \neq 0$ :

$$\int_0^1 (1-x)e^{-iax} dx = -\frac{1}{ia} - \frac{1}{a^2}(e^{ia} - 1)$$

und

$$\int_{-1}^0 (1+x)e^{-iax} dx = \frac{1}{ia} - \frac{1}{a^2}(e^{-ia} - 1).$$

Zusammen ergibt sich für  $a \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Delta)(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1-|x|)e^{-ixa} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{2-2\cos a}{a^2} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} \right)^2 = F(a). \end{aligned}$$

Außerdem  $\mathcal{F}(\Delta)(0) = \frac{1}{2\pi} = F(0)$ .

Also ist  $F = \mathcal{F}(\Delta)$ .

Mit dem Fejér-Kern gilt:

**Satz 3.1.15 Approximationsatz**

Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Für  $\lambda > 0$  bezeichne

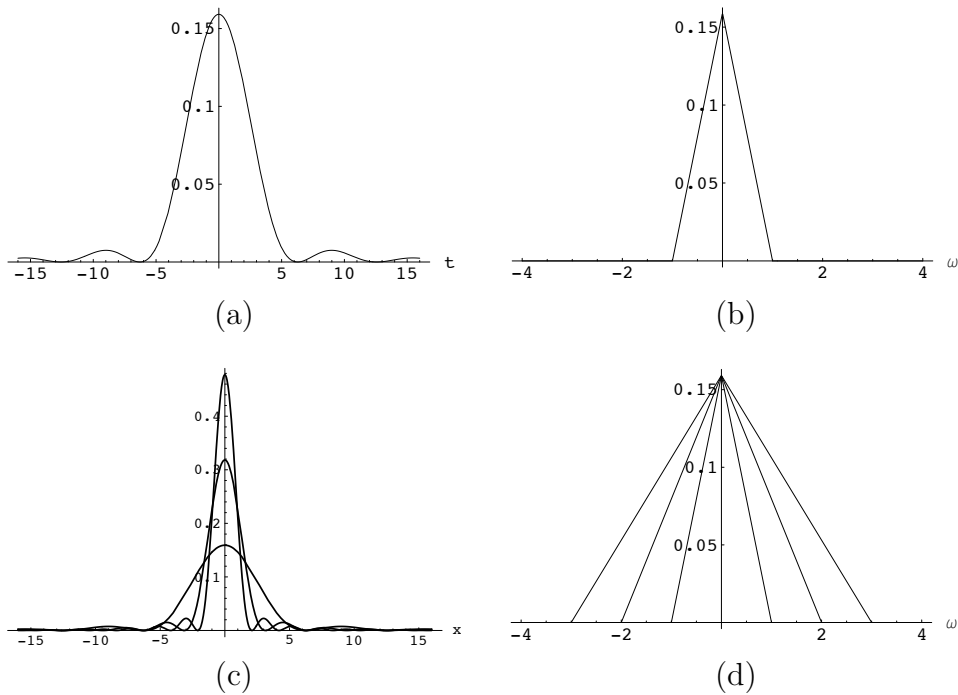
$$\sigma_\lambda(f)(x) := F_\lambda * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|a|}{\lambda}\right) \mathcal{F}(f)(a) e^{iax} da.$$

Dann gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|f - F_\lambda * f\|_1 = 0.$$

Der Beweis ist analog aufwändig wie jener für  $L^1(\mathbb{T})$ , daher hier ohne Beweis.





**Abbildung 3.1:** (a) Der Fejér-Kern  $F(x)$  und (b) seine Fourier-Integraltransformierte  $\Delta(a)$  in  $L^1(\mathbb{R})$ . (c) Für Skalierungen  $\lambda \cdot F(\lambda x)$ ,  $\lambda = 1, 2, 3$  wird der Fejér-Kern immer schmaler und höher, (d) die Fourier-Integraltransformierte immer breiter.

**Korollar 3.1.16 (Eindeutigkeitssatz)**

Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$  mit  $\mathcal{F}(f)(a) = 0$  für alle  $a \in \mathbb{R}$ .

Dann ist  $f = 0$  fast überall.

**Korollar 3.1.17 (Inversionsformel)**

Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$  mit  $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(a) e^{iax} da \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}.$$

Gleichheit gilt in allen Stetigkeitspunkten von  $f$ .

BEWEIS Die Funktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : a \mapsto \chi_{[-\lambda, \lambda]}(a) \left(1 - \frac{|a|}{\lambda}\right) \mathcal{F}(f)(a) e^{iax}$$

hat mit  $\lambda \rightarrow \infty$  den Grenzwert

$$a \mapsto \mathcal{F}(f)(a) e^{iax} \quad \text{für festes } x.$$

Der Betrag dieser Funktion kann durch  $|\mathcal{F}(f)|$  nach oben beschränkt werden. Da nach Voraussetzung  $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$  folgt mit dem Satz von der Majorisierten Konvergenz in der  $L^1$ -Norm:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} F_{\lambda} * f(x) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-\lambda, \lambda]}(a) \left(1 - \frac{|a|}{\lambda}\right) \mathcal{F}(f)(a) e^{iax} da \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(a) e^{iax} da. \end{aligned}$$

**Allgemein gilt:** Konvergiert eine Folge  $g_n \rightarrow g$  in  $L^1(\mathbb{R})$ , also  $\|g_n - g\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , so existiert eine Teilfolge  $g_{n_k}$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(x) = g(x) \quad \text{fast überall.}$$

Damit existiert eine Teilfolge  $\{F_{\lambda_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $F_{\lambda_k} * f \rightarrow f$  fast überall für  $k \rightarrow \infty$ .

Die Aussage für Stetigkeitspunkte ohne Beweis. □

**Definition 3.1.18** Bezeichne für  $g \in L^1(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(a) e^{iax} da$$

die *inverse Fourier-Transformation*.

**Bemerkung 3.1.19** Für Funktionen  $f \in L^1(\mathbb{R})$  mit  $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$  gilt

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x) \quad \text{fast überall.}$$

**Beispiel 3.1.20 (Nochmal Fejér-Kern)**

Wie wissen bereits,  $\mathcal{F}(\Delta) = F$ . Da  $\mathcal{F}(\Delta) \in L^1(\mathbb{R})$  aufgrund des kompakten Trägers, gilt mit der Inversionsformel:

$$\Delta(a) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(F)(a).$$

**Korollar 3.1.21 (Kontinuierliches Analogon zum Satz von Weierstraß)**

Die Funktion  $f \in L^1(\mathbb{R})$  mit  $\mathcal{F}(f) \in C_c(\mathbb{R})$  bilden einen Norm-dichten Teilraum von  $L^1(\mathbb{R})$ .

Hierbei bezeichnet  $C_c(\mathbb{R})$  den Raum aller stetigen Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit kompaktem Träger.

BEWEIS

$$\mathcal{F}(F_\lambda * f)(a) = \mathcal{F}(F_\lambda)(a) \mathcal{F}(f)(a) = \chi_{[-\lambda, \lambda]} \left(1 - \frac{|a|}{\lambda}\right) \mathcal{F}(f)(a),$$

d. h.  $\mathcal{F}(F_\lambda * f) \in C_c(\mathbb{R})$ .

Da der Fejér-Kern ein Summationskern ist, folgt die Behauptung. □

**Korollar 3.1.22 (Riemann–Lebesgue-Lemma)**

Für  $f \in L^1(\mathbb{R})$  gilt:  $\lim_{|a| \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f)(a) = 0$ .

BEWEIS Mit dem kontinuierlichen Analogon zum Satz von Weierstraß gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists g \in L^1(\mathbb{R}) : \mathcal{F}(g)|_{\mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda]} = 0 \text{ und } \|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

Daher gilt für  $|a| > \lambda$

$$|\mathcal{F}(f)(a)| = |\mathcal{F}(f)(a) - \mathcal{F}(g)(a)| \leq \|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

□

## 3.2 Die Plancherel-Transformation

Für viele Anwendungen eignet sich eine Hilbert-Raum-Modellierung besser, da dort ein Skalar-Produkt zur Verfügung steht. Wir zeigen in diesem Abschnitt die Erweiterung der Fourier-Transformation im Hilbert-Raum  $L^2(\mathbb{R})$ .

Wir nutzen dabei, dass  $C_c(\mathbb{R})$ , der Raum aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger ein Teilraum von  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  ist und dicht liegt in  $L^1(\mathbb{R})$  und  $L^2(\mathbb{R})$  bezüglich der jeweiligen Topologie.

**Lemma 3.2.1** Für  $f \in C_c(\mathbb{R})$  gilt  $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R})$  und

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(a)|^2 da = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx.$$

BEWEIS (i) Sei  $\text{supp } f \subset [-\pi, \pi]$ . Dann können wir  $f$  als Element  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  betrachten. Mit den Ergebnissen zu Fourier-Reihen gilt

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}(f)(n)|^2.$$

Substitution:  $f(x) \rightarrow e^{iax} f(x)$  mit  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}(f)(n+a)|^2.$$

Der Satz von Beppo Levi (Satz von der monotonen Konvergenz) liefert

$$\int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}(f)(n+a)|^2 da = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |\mathcal{F}(f)(n+a)|^2 da = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(a)|^2 da.$$

Hiermit folgt:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(a)|^2 da.$$

(ii) Falls  $\text{supp } f \not\subset [-\pi, \pi]$  skaliere und betrachte

$$g(x) = \sqrt{\lambda} f(\lambda x) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}(g)(a) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \mathcal{F}(f)\left(\frac{a}{\lambda}\right).$$

Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(g)(a)|^2 da = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(a)|^2 da.$$

□

Da  $C_c(\mathbb{R})$  dicht in  $L^2(\mathbb{R})$  liegt, können wir mit diesem Lemma die Fourier-Transformation von  $C_c(\mathbb{R})$  auf  $L^2(\mathbb{R})$  erweitern.

Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann gibt es eine Folge  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R})$  mit  $\|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Nach dem Lemma gilt für die Fourier-Transformierten

$$\|\mathcal{F}(f_m) - \mathcal{F}(f_n)\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f_m - f_n\|_2.$$

Also bildet  $\{\mathcal{F}(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L^2(\mathbb{R})$ .

Da der Raum  $L^2(\mathbb{R})$  vollständig ist existiert eine Funktion  $P(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f_n)$  in  $L^2(\mathbb{R})$ .  $P(f)$  ist fast überall definiert.

Wohldefiniertheit: Die Funktion  $P(f)$  ist unabhängig von der Wahl der Folge  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Sei  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine weitere Folge in  $C_c(\mathbb{R})$ , die in der  $L^2(\mathbb{R})$ -Norm gegen  $f$  konvergiert. Dann

$$\|f_n - g_n\|_2 \leq \|f_n - f\|_2 + \|f - g_n\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also auch

$$\|\mathcal{F}(f_n) - \mathcal{F}(g_n)\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

**Definition 3.2.2** Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R})$  eine beliebige Folge, die in  $L^2(\mathbb{R})$  gegen  $f$  konvergiert. Der Grenzwert

$$P(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f_n) \in L^2(\mathbb{R})$$

in der  $L^2(\mathbb{R})$ -Norm heißt Plancherel-Transformierte von  $f$ .

**Bemerkung 3.2.3** Die Plancherel-Transformation und die Fourier-Transformation sind beide auf  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  definiert. Tatsächlich stimmen sie dort überein:

Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Wähle eine Folge  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R})$ , die in  $L^1(\mathbb{R})$  und  $L^2(\mathbb{R})$  gegen  $f$  konvergiert. Dann gilt

$$\|\mathcal{F}(f_n) - P(f)\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}(f_n)(a) \rightarrow \mathcal{F}(f)(a) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R} \text{ und } n \rightarrow \infty.$$

Da  $\mathcal{F}(f_n) - P(f)$  in  $L^2(\mathbb{R})$ , gibt es eine Teilfolge  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ , so dass  $\mathcal{F}(f_{n_k})(a) \rightarrow P(f)(a)$  für fast alle  $a \in \mathbb{R}$ . Also gilt  $\mathcal{F}(f) = P(f)$  fast überall.

**Lemma 3.2.4** Für  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  gilt  $\mathcal{F}(f) = P(f)$  fast überall. Weiter

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(a)|^2 da = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx.$$

**Satz 3.2.5 (Eine äquivalente Beschreibung der Plancherel-Transformation)**

Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Für  $\lambda > 0$  setze  $f_\lambda := \chi_{[-\lambda, \lambda]} f$ .

Dann ist  $f_\lambda \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  und  $\mathcal{F}(f_\lambda) \in L^2(\mathbb{R})$ .

Insbesondere gilt  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|P(f) - \mathcal{F}(f_\lambda)\|_2 = 0$ .

BEWEIS Wir zeigen zuerst  $f_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ .

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-\lambda, \lambda]}(y) |f(y)| dy \leq_{(\text{C.-S.-Ungl.})} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy \right)^{1/2} (2\lambda)^{1/2} < \infty.$$

Da auch  $f_\lambda \in L^2(\mathbb{R})$  gilt nach Lemma 3.2.4  $\mathcal{F}(f_\lambda) \in L^2(\mathbb{R})$ .

Sei  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R})$  eine Folge mit  $\|f - g_n\|_2 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathcal{F}(g_n) - \mathcal{F}(f_\lambda)\|_2 = \|g_n - f_\lambda\|_2 \leq \|g_n - f\|_2 + \|f - f_\lambda\|_2 \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$  und  $\lambda \rightarrow \infty$ . Damit

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f_\lambda) = P(f)$$

in der  $L^2$ -Norm. □

Wir wissen soweit, dass die Plancherel-Transformation  $P$  ein beschränkter linearer Operator  $P : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  ist. Wir wissen weiter, dass

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|P(f)\|_2 = \|f\|_2 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

und daher  $P$  injektiv ist.

Zur Surjektivität zeigen wir eine Inversionsformel.

**Lemma 3.2.6 (Parseval)** Für  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  gilt

$$\langle P(f), \bar{g} \rangle = \langle P(g), \bar{f} \rangle.$$

BEWEIS Sei  $f, g \in C_c(\mathbb{R})$ . Der Satz von Fubini liefert

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(f), \bar{g} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(a) g(a) da = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iax} dx g(a) da \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{F}(g)(x) dx = \langle \mathcal{F}(g), \bar{f} \rangle. \end{aligned}$$

Für  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  wähle konvergente Folgen  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R})$  mit  $f_n \rightarrow f$  und  $g_n \rightarrow g$  für  $n \rightarrow \infty$  in der  $L^2(\mathbb{R})$ -Norm. Mit der Stetigkeit des Skalar-Produkts folgt

$$\langle P(f), \bar{g} \rangle = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{F}(f_n), \bar{g}_m \rangle = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{F}(g_m), \bar{f}_n \rangle = \langle P(g), \bar{f} \rangle.$$

□

**Satz 3.2.7 (Inversionsformel)** Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann

$$f = \frac{1}{2\pi} \overline{P(P(f))} \quad \text{fast überall.}$$

BEWEIS Setze  $g := \overline{P(f)}$ . Aufgrund der Linearität des Skalar-Produkts gilt:

$$\|f - \frac{1}{2\pi} \overline{P(g)}\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \langle f, \frac{1}{2\pi} \overline{P(g)} \rangle - \langle \frac{1}{2\pi} \overline{P(g)}, f \rangle + \|\frac{1}{2\pi} \overline{P(g)}\|_2^2.$$

Nach der Parseval-Gleichung gilt

$$\langle f, \frac{1}{2\pi} \overline{P(g)} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle P(g), \bar{f} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle P(f), \bar{g} \rangle = \frac{1}{2\pi} \|P(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2$$

und

$$\langle \frac{1}{2\pi} \overline{P(g)}, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \overline{\langle P(g), \bar{f} \rangle} = \|f\|_2^2,$$

sowie

$$\|\frac{1}{2\pi} \overline{P(g)}\|_2^2 = \frac{1}{4\pi^2} \|P(g)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|g\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Damit folgt

$$\|f - \frac{1}{2\pi} \overline{P(g)}\|_2^2 = 0$$

und die Behauptung. □

Also ist  $P : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  ein topologischer Automorphismus.

Wir können zusammenfassen:

### Satz 3.2.8 (Plancherel)

*Der lineare Operator  $P : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  ist ein Isomorphismus von  $L^2(\mathbb{R})$  auf  $L^2(\mathbb{R})$ . Er erfüllt die folgenden Eigenschaften:*

(i) Für alle  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  gilt

$$\frac{1}{2\pi} \langle P(f), P(g) \rangle = \langle f, g \rangle.$$

Insbesondere ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|P(f)\|_2 = \|f\|_2.$$

(ii)  $P(f) = \mathcal{F}(f)$  für  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ .

(iii)  $P(f)(a) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) e^{-iax} dx$  in der  $L^2$ -Norm.

(iv)  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} P(f)(a) e^{iax} da$  in der  $L^2$ -Norm.

**BEWEIS** Wir müssen nur noch (i) zeigen. Mit der Formel von Plancherel und dem Inversionsatz gilt

$$\frac{1}{2\pi} \langle P(f), P(g) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle P(\overline{P(g)}), \bar{f} \rangle = \langle \bar{g}, \bar{f} \rangle = \langle f, g \rangle.$$

□

**Ziel:** Untersuchung der punktweisen Konvergenz von  $\sigma_\lambda(f)$  für  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

Dazu führen wir die Faltung  $*$  :  $L^1(\mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p < \infty$ , ein.

Wir definieren für  $f \in L^p(\mathbb{R})$  und  $g \in L^1(\mathbb{R})$

$$g * f(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy.$$

Wir zeigen, dass  $g * f$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}$  existiert und dass  $g * f \in L^p(\mathbb{R})$  mit  $\|g * f\|_p \leq \|g\|_1 \|f\|_p$ .

Die Funktion

$$(x, y) \mapsto |f(x - y)|^p |g(y)|$$

ist meßbar. Wie in den anderen Beweisen zu Faltungsoperationen in  $L^1(\mathbb{T})$  und  $L^1(\mathbb{R})$  erhalten wir, dass die Funktion

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)|^p |g(y)| dy$$

für fast alle  $x \in \mathbb{R}$  existiert und integrierbar ist mit

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)|^p |g(y)| dy dx = \|f\|_p^p \|g\|_1.$$

Sei nun  $q$  der konjugierte Exponent:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Mit der Hölder-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |g * f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)| |g(y)| dy \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)|^p |g(y)| dy \right)^{1/p} \left( \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Daher existiert  $g * f(x)$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}$ , und es gilt

$$\|g * f\|_p \leq \|g\|_1^{1/q} \|f\|_p \|g\|_1^{1/p} = \|g\|_1 \|f\|_p.$$

Hiermit folgt:

**Satz 3.2.9** Sei  $g \in L^1(\mathbb{R})$  und  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann ist

$$g * f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy$$

ein Element des  $L^2(\mathbb{R})$  und es gilt  $\|g * f\|_2 \leq \|g\|_1 \|f\|_2$ .

Die Plancherel-Transformation erfüllt

$$P(g * f) = \mathcal{F}(g)P(f).$$



BEWEIS Es genügt, die Aussage über Fourier- resp. Plancherel-Transformation zu zeigen. Sei  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R})$ , so dass  $f_n \rightarrow f$  in der  $L^2$ -Norm für  $n \rightarrow \infty$ . Dann sind  $g * f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  und es gilt

$$\|g * f - g * f_n\|_2 \leq \|g\|_1 \|f - f_n\|_2.$$

Da die Fourier-Transformierte der  $L^1$ -Funktion stetig und beschränkt ist durch  $\|\mathcal{F}(g)\|_\infty \leq \|g\|_1$  gilt  $\mathcal{F}(g)P(f) \in L^2(\mathbb{R})$ . Daher

$$\begin{aligned} \|P(f * g) - \mathcal{F}(g)P(f)\|_2 &\leq \|P(g * f) - P(g * f_n)\|_2 + \|\mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f_n) - \mathcal{F}(g)P(f)\|_2 \\ &\leq \sqrt{2\pi} \|g * f - g * f_n\|_2 + \|\mathcal{F}(g)\|_\infty \|\mathcal{F}(f_n) - P(f)\|_2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Also  $P(g * f) = \mathcal{F}(g)P(f)$ . □

Also ist mit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  auch  $F_\lambda * f \in L^2(\mathbb{R})$ . Insbesondere gilt:

$$F_\lambda * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|a|}{\lambda}\right) P(f)(a) e^{iax} da.$$

Dies sieht man wie folgt:

Setze  $\varphi(a) = \Delta^\lambda(a) e^{iax}$ . Dann gilt

$$\mathcal{F}(\varphi)(y) = \int_{\mathbb{R}} \Delta^\lambda(a) e^{-ia(y-x)} da = F_\lambda(y-x).$$

Da  $\varphi$  stetig ist und kompakten Träger hat gilt  $\mathcal{F}(\varphi) = P(\varphi)$ . Mit dem Satz von Plancherel gilt:

$$\begin{aligned} F_\lambda * f(x) &= \int_{\mathbb{R}} F_\lambda(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} F_\lambda(y-x) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} P(\varphi)(y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} P(f)(a) \varphi(a) da = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|a|}{\lambda}\right) P(f)(a) e^{iax} da. \end{aligned}$$

Und auch im Falle der Plancherel-Transformation gilt ein Approximationssatz:

**Satz 3.2.10** Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Bezeichne

$$\sigma_\lambda(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|a|}{\lambda}\right) P(f)(a) e^{iax} da.$$

Dann gilt  $\sigma_\lambda(f)(x) \rightarrow f(x)$  für  $\lambda \rightarrow \infty$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}$ .

(ohne Beweis)

# Kapitel 4

## Fourier-Transformation für Schwartz-Funktionen und temperierte Distributionen

Für dieses Kapitel betrachten wir den  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Normalisiertes Lebesgue-Maß auf dem  $\mathbb{R}^n$ :

$$dm_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} dx.$$

Zugehörige  $L^p(\mathbb{R}^n)$ -Räume mit Norm

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dm_n(x) \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Wir redefinieren die Faltung zweier Funktionen bezüglich dieses normalisierten Maßes als

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dm_n(y),$$

falls das Integral existiert.

Bezeichnungen:

$$e_t(x) = e^{i\langle t, x \rangle} = \exp(i(t_1x_1 + \dots + t_nx_n)), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ :

$$\hat{f}(t) := \mathcal{F}(f)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e_{-t}(x) dm_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-itx} dx = (f * e_t)(0), \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Sei  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  ein Multiindex.  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

Kurzschreibweise für Differentialoperatoren:

$$D_\alpha := \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}.$$

Hiermit gilt

$$D_\alpha e_t = t^\alpha e_t.$$

Sei  $P(t) = \sum_\alpha c_\alpha t^\alpha$  ein Polynom im  $\mathbb{R}^n$  und  $P(D) = \sum_\alpha c_\alpha D_\alpha$  der zugehörige Differentialoperator. Dann

$$P(D)e_t = P(t)e_t, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

## 4.1 Test-Funktionen und Schwartz-Funktionen

Wir werden in den kommenden Abschnitten Distributionen betrachten. Das sind stetige Linearformen über Funktionräumen  $X$ . Sie werden eingeführt, um den Differentiationsbegriff zu verallgemeinern. (Z.B.  $f \in L^1$ . Was ist mit  $f'$ ?) Sie können nicht punktweise ausgewertet werden, sondern werden anhand der Auswertung an Testfunktionen untersucht.

**Definition 4.1.1** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Der Raum der Test-Funktionen  $\mathcal{D}(\Omega)$  ist der Raum aller  $C^\infty$ -Funktionen mit kompaktem Träger, versehen mit folgender Topologie  $\tau$ : Eine Folge von Funktionen  $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$  konvergiert gegen Null in der Topologie  $\tau$ , wenn es ein festes Kompaktum  $K \subset \Omega$  gibt mit

- $\text{supp } \varphi_m \subset K$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ .
- $\varphi_m$  und alle Ableitungen  $\rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$  in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf  $K$ .

Mit dieser Topologie wird  $\mathcal{D}(\Omega)$  vollständig, aber nicht metrisierbar.

Eine metrisierbare Topologie über abzählbar viele Normen wird in der Übung vorgestellt. Mit dieser ist der Raum dann allerdings nicht vollständig.

**Definition 4.1.2** Schnell fallende Funktionen heißen jene  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |(D_\alpha f)(x)| < \infty \quad (4.1)$$

für alle  $N = 0, 1, 2, \dots$

Das heißt,  $P \cdot D_\alpha f$  ist beschränkt für jedes Polynom  $P$  und jeden Multiindex  $\alpha$ .

Da dies für alle  $(1 + |x|^2)^N P(x)$  anstelle von  $P(x)$  gilt, folgt  $P \cdot D_\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Die schnell fallenden Funktionen bilden einen Vektorraum, den Schwartz-Raum  $\mathcal{S}_n$ . Die durch (4.1) definierten Normen erzeugen eine lokal-konvexe Topologie. D.h. jeder Punkt besitzt eine konvexe Umgebungsbasis.

Offensichtlich  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_n$ .

**Satz 4.1.3** (i)  $\mathcal{S}_n$  ist ein Fréchet-Raum, d.h. ein vollständiger metrisierbarer Vektorraum.

(ii) Wenn  $P$  ein Polynom ist,  $g \in \mathcal{S}_n$ ,  $\alpha$  Multiindex, dann sind die folgenden drei Abbildungen stetig und linear:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n : \quad & f \mapsto Pf, \\ & f \mapsto gf, \\ & f \mapsto D_\alpha f. \end{aligned}$$

(iii) Wenn  $f \in \mathcal{S}_n$  und  $P$  Polynom, dann

$$(P(D)f)^\wedge = P\hat{f} \quad \text{und} \quad (Pf)^\wedge = P(-D)\hat{f}.$$

(iv) Die Fourier-Transformation ist eine stetige lineare Abbildung von  $\mathcal{S}_n$  in  $\mathcal{S}_n$ .

**Bemerkung 4.1.4** Aussage (iv) werden wir später noch verschärfen:

$\hat{\cdot} : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  ist ein bistetiger Automorphismus.

BEWEIS -Skizze:

(i) Sei  $\{f_i\}_i$  eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{S}_n$ .

Für jedes Multiindex-Paar  $\alpha, \beta$  konvergieren die Funktionen  $x^\beta D^\alpha f_i$  gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion  $g_{\alpha,\beta}$  für  $i \rightarrow \infty$ .

Es folgt  $g_{\alpha,\beta}(x) = x^\beta D^\alpha g_{0,0}(x)$  und daher  $f_i \rightarrow g_{0,0}$  in  $\mathcal{S}_n$ .

Daher ist  $\mathcal{S}_n$  vollständig.

(ii) Sei  $f \in \mathcal{S}_n$ . Dann  $D_\alpha f \in \mathcal{S}_n$  und nach der Leibniz-Formel  $Pf, gf \in \mathcal{S}_n$ .

Der Satz vom abgeschlossenen Graphen liefert die Stetigkeit der Abbildungen.

Zur Erinnerung: Der Satz vom abgeschlossenen Graphen besagt folgendes:

Seien  $X, Y$  zwei vollständige metrisierbare Vektorräume (Fréchet-Räume). (Achtung, Metrik translationsinvariant!) Sei  $T$  eine lineare Abbildung.  $T$  ist genau dann stetig, wenn der Graph  $\Gamma(T) = \{(x, Tx) \mid x \in X\}$  von  $T$  in  $X \times Y$  abgeschlossen ist. Dabei ist  $X \times Y$  mit der Produkt-Topologie versehen.

(iii) Sei  $f \in \mathcal{S}_n$ . Dann  $P(D)f \in \mathcal{S}_n$  nach (ii).

– Zur ersten Gleichung:

$$(P(D)f) * e_t = f * P(D)e_t = f * P(t)e_t = P(t)(f * e_t).$$

Auswerten am Nullpunkt liefert

$$(P(D)f)\widehat{\phantom{f}}(t) = P(t)\widehat{f}(t).$$

– Zur zweiten Gleichung:

Setzte  $t = (t_1, \dots, t_n)$ ,  $t' = (t_1 + \varepsilon, t_2, \dots, t_n)$ ,  $\varepsilon \neq 0$ .

$$\frac{\widehat{f}(t') - \widehat{f}(t)}{i\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) \frac{e^{-ix_1\varepsilon} - 1}{ix_1\varepsilon} e^{-i\langle x, t \rangle} dm_n(x).$$

Da  $x_1 f \in L^1$  gilt nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_1} \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) e^{-i\langle x, t \rangle} dm_n(x).$$

Dies ist der Fall  $P(x) = x_1$ . Der allgemeine Fall folgt durch Iteration.

(iv) Sei  $f \in \mathcal{S}_n$ ,  $g(x) = (-1)^{|\alpha|} x^\alpha f(x) \in \mathcal{S}_n$ .

Mit (iii) folgt

$$\widehat{g} = D_\alpha \widehat{f} \quad \text{und} \quad P \cdot D_\alpha \widehat{f} = P \cdot \widehat{g} = (P(D)g)\widehat{\phantom{g}}.$$

Die letzte Funktion ist beschränkt, da  $P(D)g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .  $\Rightarrow \widehat{f} \in \mathcal{S}_n$ .

Wenn  $f_i \rightarrow f$  in  $\mathcal{S}_n$ , dann  $f_i \rightarrow f$  in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

$$\Rightarrow \widehat{f}_i(t) \rightarrow \widehat{f}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^n.$$

Mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt nun, dass  $f \rightarrow \widehat{f}$  eine stetige Abbildung von  $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  ist.

□

Eine unter der Fourier-Transformation invariante Funktion:

**Lemma 4.1.5** *Definiere*

$$\varphi_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt  $\varphi_n \in \mathcal{S}_n$ ,  $\widehat{\varphi}_n = \varphi_n$  und

$$\varphi_n(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}_n(x) dm_n(x).$$

BEWEIS Offenbar  $\varphi_n \in \mathcal{S}_n$ .

Die Funktion  $\varphi_1$  erfüllt die Differentialgleichung

$$y' + xy = 0.$$

(Nachrechnen!) Mit Satz 4.1.3 (iii) lässt sich zeigen, dass auch  $\widehat{\varphi}_1$  auch diese Differentialgleichung erfüllt. (Beachte  $D = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ .)

Da der Lösungsraum der Differentialgleichung eindimensional ist, folgt

$$\frac{\widehat{\varphi}_1}{\varphi_1} = \text{const.}$$

Da  $\varphi_1(0) = 1$  und

$$\widehat{\varphi}_1(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x) dm_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{1}{2}x^2) dx = 1$$

folgt  $\widehat{\varphi}_1 = \varphi_1$ .

Für allgemeine  $n$  betrachte

$$\varphi_n(x) = \varphi_1(x_1) \cdot \dots \cdot \varphi_1(x_n), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann

$$\widehat{\varphi}_n(t) = \widehat{\varphi}_1(t_1) \cdot \dots \cdot \widehat{\varphi}_1(t_n), \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Damit  $\widehat{\varphi}_n = \varphi_n$  für alle  $n$ .

Da

$$\widehat{\varphi}_n(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n(x) dm_n(x)$$

nach Definition der Fourier-Transformation folgt

$$\varphi_n(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}_n(x) dm_n(x).$$

□

### Satz 4.1.6 (Der Inversionssatz)

(i) Sei  $g \in \mathcal{S}_n$ . Dann gilt:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(t) e_x(t) dm_n(t), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Die Fourier-Transformation ist eine stetige lineare bijektive Abbildung von  $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  mit Periode 4. Die inverse Abbildung ist ebenso stetig.

(iii) Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und

$$f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(t) e_x(t) dm_n(t), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt  $f(x) = f_0(x)$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Zum Beweis nutzen wir folgendes:

**Lemma 4.1.7 (Schwacher Satz von Parseval)**

Seien  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) g(x) dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x) dm_n(x).$$

BEWEIS Betrachte das Doppelintegral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dm_n(x) dm_n(y)$$

und wende den Satz von Fubini an. □

Sei  $g$  eine Funktion.

Notation: Translationsoperator  $\tau_x g := g(\bullet - x)$ .

Spiegelung  $\check{g} = g(-\bullet)$ .

BEWEIS von Satz 4.1.6:

(i) Seien  $g, \varphi \in \mathcal{S}_n$ . Sei  $\lambda > 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\frac{t}{\lambda}\right) \widehat{\varphi}(t) dm_n(t) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(g\left(\frac{\bullet}{\lambda}\right)\right) \check{\varphi}(x) \varphi(x) dm_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n \widehat{g}(\lambda x) \varphi(x) dm_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) dm_n(y). \end{aligned}$$

Für  $\lambda \rightarrow \infty$  gilt  $g\left(\frac{t}{\lambda}\right) \rightarrow g(0)$  und  $\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \rightarrow \varphi(0)$  und

$$\sup_{\lambda} \left| g\left(\frac{t}{\lambda}\right) \right| < \text{const.} \quad \text{und} \quad \sup_{\lambda} \left| \varphi\left(\frac{t}{\lambda}\right) \right| < \text{const.}$$

Damit kann der Satz von der majorisierten Konvergenz angewendet werden, und es folgt für die Intergralgleichung:

$$g(0) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(t) dm_n(t) = \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) dm_n(y). \tag{4.2}$$

Wir ersetzen nun  $\varphi$  durch  $\varphi_n(x) = \exp(-\frac{1}{2}\|x\|^2)$  aus Lemma 4.1.5. Damit ergibt sich aus (4.2) die Behauptung für  $x = 0$ .

Der allgemeine Satz folgt über Translation:

$$\begin{aligned} g(x) = (\tau_{-x}g)(0) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{-x}g)\widehat{\phantom{g}}(t) dm_n(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(t)e_{-x}(t) dm_n(t). \end{aligned}$$

- (ii) Die Inversionsformel (i) zeigt, dass  $\mathcal{F}$  auf  $\mathcal{S}_n$  injektiv ist, denn  $\widehat{g} = 0$  impliziert  $g = 0$ .

Weiter folgt aus (i):

$$\mathcal{F}^2 g = \check{g} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}^4 g = g.$$

Also ist  $\mathcal{F} : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  surjektiv.

Dass  $\mathcal{F}$  stetig ist, haben wir bereits in Satz 4.1.3 (iv) gezeigt.

Um zu zeigen, dass  $\mathcal{F}^{-1}$  stetig ist, können wir entweder den Satz von der offenen Abbildung anwenden oder  $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$  nutzen.

Zur Erinnerung: Satz von der offenen Abbildung:

Seien  $X, Y$  zwei Fréchet-Räume,  $T : X \rightarrow Y$  stetig, linear, surjektiv, offen. Dann ist  $T$  offen.

- (iii) Seien  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und  $g \in \mathcal{S}_n$ . Mit dem schwachen Satz von Parseval, der Inversionsformel und dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x) dm_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x) dm_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(t)e_x(t) dm_n(t) dm_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(t) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)e_t(x) dm_n(t) dm_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(t)f_0(t)dm_n(t) \end{aligned}$$

für alle  $g \in \mathcal{S}_n$ .

Da  $\widehat{g}$  nach (ii) den ganzen Raum  $\mathcal{S}_n$  durchläuft und da  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_n$  folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f_0 - f)(t)\varphi(t) dm_n(t) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

$\Rightarrow f_0 = f$  fast überall.



□

**Satz 4.1.8** Seien  $f, g \in \mathcal{S}_n$ . Dann gilt:

(i)  $f * g \in \mathcal{S}_n$  und

(ii)  $(f \cdot g)^\wedge = \hat{f} * \hat{g}$ .

BEWEIS Satz 3.2.9 liefert für Schwartz-Funktionen  $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$ .

Setze  $\hat{f}, \hat{g}$  statt  $f, g$ . Dann folgt

$$\mathcal{F}(\hat{f} * \hat{g}) = (\mathcal{F}\hat{f})(\mathcal{F}\hat{g}) = (\mathcal{F}^2 f)(\mathcal{F}^2 g) = \check{f} \cdot \check{g} = (f \cdot g)^\vee = \mathcal{F}^2(f \cdot g),$$

und weiter mit Fourier-Inversion

$$\hat{f} * \hat{g} = \mathcal{F}(f \cdot g).$$

Das ist (ii).

Da  $f \cdot g \in \mathcal{S}_n$  folgt mit (ii)

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \hat{f} * \hat{g}.$$

Dies liefert (i), da  $\mathcal{F} : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  ein Automorphismus ist. □

## 4.2 Distributionen

**Ziel:** Erweiterung des Differentialkalküls für Funktionen, die im klassischen Sinn **nicht** differenzierbar sind,

über die Definition von verallgemeinerten Funktionen oder Distributionen.

Solch eine Verallgemeinerung sollte folgende Eigenschaften besitzen, um sinnvoll zu sein:

- (a) Jede stetige Funktion sollte eine Distribution sein.
- (b) Jede Distribution sollte partielle Ableitungen besitzen, die wiederum Distributionen sind.

Für differenzierbare Funktionen sollte die neue Definition der Ableitung mit der herkömmlichen übereinstimmen.

- (c) Die gewöhnlichen formalen Rechenregeln sollten weiterhin gelten.
- (d) Es sollte Konvergenzsätze geben, mit denen sich die gewöhnlichen Limesprozesse behandeln lassen.

**Ein erster Gedanke: Darstellungssatz von Riesz.**

Charakterisierung der Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  durch

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \overline{\varphi(x)} dx$$

für alle  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  oder für all  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . ( $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  ist dicht in  $L^2(\mathbb{R})$ .)

**Zweiter Gedanke: Partielle Integration.**

Für  $f \in C^1(\mathbb{R})$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Im Ausdruck rechts ist  $f$  ableitungsfrei. Die rechte Seite macht Sinn für  $f \in L^2(\mathbb{R})$  oder  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

**Idee:** Definiere  $f'$  durch  $-\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x) dx$  für alle  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

**4.2.1 Der Raum der Distributionen und seine Topologie**

**Definition 4.2.1** Ein lineares Funktional  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ , das stetig bezüglich der Topologie  $\tau$  von  $\mathcal{D}(\Omega)$  ist, heißt Distribution in  $\Omega$ .

Der Raum der Distributionen in  $\Omega$  wird mit  $\mathcal{D}'(\Omega)$  bezeichnet.

$\mathcal{D}'(\Omega)$  ist also der Dualraum zu  $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ . Er wird mit der üblichen Addition und Multiplikation mit einem Skalar zum Vektorraum. Man kann zeigen, dass  $\mathcal{D}'(\Omega)$  vollständig ist (Banach-Steinhaus-Argument).

Der Begriff „Distribution“ geht auf Laurent Schwartz zurück. Gelfand und Shilov haben den etwas treffenderen Begriff „verallgemeinerte Funktionen“ („generalized functions“) geprägt.

Wir bleiben bei Distributionen.

**Schreibweise:**s Sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  und  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

$$T\varphi = T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle.$$

Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt. Bezeichne  $\mathcal{D}_K$  den Raum aller  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , deren Träger  $\text{supp } f \subset K$  erfüllen.

Für  $K \subset \Omega$  ist  $\mathcal{D}_K$  ein Untervektorraum von  $C^\infty(\Omega)$ .

**Topologie auf  $C^\infty(\Omega)$ :**

Wähle Kompakta  $K_i$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ , mit  $K_i \subset \text{int}(K_{i+1})$  und  $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} K_i$ .

Definiere  $p_N$  auf  $C^\infty(\Omega)$ ,  $N \in \mathbb{N}_0$ , durch

$$p_N(f) = \max \{ |D^\alpha f(x)| : x \in K_N, |\alpha| \leq N \}.$$

Dies sind Seminormen, da die Positivdefinitheit nicht erfüllt ist. Dennoch definieren sie eine metrisierbare lokal-konvexe Topologie auf  $C^\infty(\Omega)$ .

**Aufgabe 4.2.2** Überprüfen Sie die Hausdorff-Eigenschaft.

Für jedes  $x \in \Omega$  ist das Funktional

$$C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(x)$$

stetig, denn  $|f(x)| \leq p_N(f)$  für alle  $x \in K_N$  und alle  $N \in \mathbb{N}_0$ .

Durchlaufe  $x \in \Omega \setminus K$ . Dann folgt

$$\mathcal{D}_K = \bigcap_{x \in \Omega \setminus K} \{f \mid f(x) = 0\}.$$

Damit ist  $\mathcal{D}_K$  abgeschlossen in  $C^\infty(\Omega)$ .

Weiter kann man zeigen, dass  $C^\infty(\Omega)$  so zum Fréchet-Raum wird. Insbesondere sind alle  $\mathcal{D}_K$  als abgeschlossenen Teilräume vollständig.

Wir untersuchen nun den Zusammenhang mit  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

**Weitere Topologie auf  $\mathcal{D}(\Omega)$ :**

Familie von Normen:

$$\|\varphi\|_N = \max\{|D^\alpha \varphi(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leq N\}, \quad \forall N \in \mathbb{N}_0.$$

Nachteil: Die Topologie ist nicht vollständig.

**Beispiel 4.2.3** in  $\mathbb{R}$ :

Sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp } \varphi \in [0, 1]$ ,  $\varphi > 0$  in  $]0, 1[$ .

$$\psi_m(x) = \varphi(x-1) + \frac{1}{2}\varphi(x-2) + \dots + \frac{1}{m}\varphi(x-m), \quad m \in \mathbb{N},$$

ist eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  für die Topologie induziert durch die Normen  $\{\|\bullet\|_N\}_{N \in \mathbb{N}_0}$ . Aber  $\lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m$  hat nicht kompakten Träger. Daher  $\lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

Trotzdem sind die  $\|\bullet\|_N$ -Normen praktisch:

**Lemma 4.2.4** Die Einschränkung der Normen  $\|\bullet\|_N$ ,  $N \in \mathbb{N}_0$ , auf ein beliebiges festes  $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$  induziert dieselbe Topologie auf  $\mathcal{D}_K$ , wie die Seminormen

$$p_N(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| : x \in K_N, |\alpha| \leq N\}, \quad N \in \mathbb{N}_0.$$

**BEWEIS** Für jedes Kompaktum  $K \subset \Omega$  gibt es ein  $N_0 \in \mathbb{N}_0$  mit  $K \subset K_N$  für alle  $N \geq N_0$ . Für diese  $N$  gilt:  $\|\varphi\|_N = p_N(\varphi)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}_K$ . Da  $\|\varphi\|_N \leq \|\varphi\|_{N+1}$  und  $p_N(\varphi) = p_{N+1}(\varphi)$  wird die Topologie nicht verändert, wenn wir die Indizierung bei  $N_0$  statt bei 1 beginnen lassen. Daher sind die beiden Topologien auf  $\mathcal{D}_K$  gleich.  $\square$

Eine Umgebungsbasis bilden die Mengen

$$U_N = \{\varphi \in \mathcal{D}_K : \|\varphi\|_N < \frac{1}{N}\} \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Die Räume  $\mathcal{D}_K$  sind gut geeignet, um die Stetigkeit der linearen Funktionale  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  nachzuweisen.

**Satz 4.2.5** Sei  $T$  ein lineares Funktional auf  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Dann sind äquivalent:

(i)  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

(ii) Für jedes Kompaktum  $K \subset \Omega$  gibt es  $N \in \mathbb{N}_0$  und eine Konstante  $0 < c < \infty$  mit

$$|T(\varphi)| \leq c \|\varphi\|_N \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K.$$

(ohne Beweis)

**Schreibweise:** Sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  und  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

$$T\varphi = T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle.$$

## 4.2.2 Rechnen mit Distributionen

Wir wissen,  $\mathcal{D}'(\Omega)$  ist ein Vektorraum. Seien  $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

$$\langle T + \lambda S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \lambda \langle S, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

### Beispiele 4.2.6 1. Reguläre Distributionen

Sei  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , d.h.  $f$  ist über jede Kompakte Menge  $K \subset \Omega$  integrierbar.

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dann ist  $T_f$  ein Distribution. Sie heißt „reguläre Distribution“.

Zur Stetigkeit: Für alle  $\varphi \in \mathcal{D}_K$  gilt

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \int_K |f(x)| dx \|\varphi\|_0.$$

### 2. Dirac-Distribution

Sei  $x \in \Omega$ .

$$\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Stetigkeit:

$$|\langle \delta_x, \varphi \rangle| \leq \|\varphi\|_0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K.$$

**Aufgabe 4.2.7** Zeigen Sie,  $\delta_x$  ist keine reguläre Distribution.

### Ableiten von Distributionen

Wir hatten eingangs schon die Idee formuliert, die Ableitung auf die mit Minuszeichen versehene Test-Funktion zu schieben. Nach unserem Forderungskatalog sollen wieder die neue und die herkömmliche Ableitung übereinstimmen.

Sei  $f \in C^1(\mathbb{R})$ .

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x) dx = -\langle T_f, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

**Definition 4.2.8** Sei  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  und  $\alpha$  ein Multi-Index mit  $|\alpha| = k$ .

$$\langle T', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (4.3)$$

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (4.4)$$

$D^\alpha T$  ist ein lineares Funktional auf  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Es ist stetig, denn falls für ein  $N \in \mathbb{N}_0$  und eine Konstante  $C > 0$  gilt

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_N \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K,$$

dann gibt es eine Konstante  $C' > 0$  mit

$$|\langle D^\alpha T, \varphi \rangle| \leq C \|D^\alpha \varphi\|_N \leq C' \|\varphi\|_{N+|\alpha|} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K.$$

Dies gilt für alle Kompakta  $K \subset \Omega$ . Damit ist  $D^\alpha T$  stetig.

### Multiplikation mit Funktionen

Sei  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  und  $f \in C^\infty(\Omega)$ .

$$\langle fT, \varphi \rangle := \langle T, f\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Aufgabe 4.2.9** Leiten Sie eine Leibniz-Formel für Ableitungen von Distributionen her. Zeigen Sie mit dieser Leibniz-Formel, dass  $fT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

### Lineare Substitution und Translation

Sei  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $A \in GL(n\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ .

$$\langle S, \varphi \rangle := \langle T(A \bullet + b), \varphi \rangle := \frac{1}{|\det A|} \langle T, \varphi(A^{-1}(\bullet - b)) \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Insbesondere gilt für Spiegelungen:

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T(-\bullet), \varphi \rangle = \langle T, \varphi(-\bullet) \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Aufgabe 4.2.10** Zeigen Sie, dass  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

### 4.3 Temperierte Distributionen und die Fourier-Transformation

**Ziel:** Fourier-Transformation für Distributionen definieren.

**Idee:** Schawacher Satz von Parseval.

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

**Problem:**  $\widehat{\varphi} \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

**Lösung:** Ausweitung des Raums der Testfunktionen  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  auf den Raum der Schwartz-Funktionen  $\mathcal{S}_n$ , den der ist invariant unter der Fourier-Transformation.

Dies bedeutet eine Einschränkung von  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  auf Teilraum.

Es gelten die Einbettungen

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_n \subset L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'_n \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

**Satz 4.3.1** (i)  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  liegt dicht in  $\mathcal{S}_n$ .

(ii)  $Id : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}_n$  ist stetig.

(ohne Beweis)

Sei  $L : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{C}$  ein stetiges lineares Funktional.

Dann ist  $u_L = L \circ Id : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  ein Element aus  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

Da  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $\mathcal{S}_n$  liegt, können zwei verschiedene  $L$  nicht dasselbe  $u_L$  erzeugen.

Folglich beschreibt  $u_L$  einen Isomorphismus zwischen  $\mathcal{S}'_n$  und einem gewissen Distributionsraum, dem Raum der **temperierten Distributionen**.

**Satz 4.3.2** Die temperierten Distributionen sind genau jene  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , die eine stetige Erweiterung auf  $\mathcal{S}_n$  besitzen.

**Satz 4.3.3** Es gilt für  $T \in \mathcal{S}_n$ ,  $\alpha$  Multi-Index,  $P$  Polynom und  $g \in \mathcal{S}_n$ :

$$D^\alpha T, PT, gT \in \mathcal{S}'_n.$$

**Aufgabe 4.3.4** Beweisen Sie diesen Satz.

**Definition 4.3.5** Sei  $T \in \mathcal{S}'_n$ . Definiere die Fourier-Transformation auf  $\mathcal{S}_n$  durch

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \widehat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_n.$$

Die Idee liegt im schwachen Satz von Parseval begründet.

**Wohldefiniertheit:**  $\mathcal{F} : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n, \varphi \rightarrow \widehat{\varphi}$  ist stetig. Weiter ist  $T$  stetig auf  $\mathcal{S}_n$ . Als Komposition zweier stetiger Abbildungen ist  $\widehat{T} \in \mathcal{S}'_n$ .

**Aufgabe 4.3.6** Zeigen Sie die Konsistenz zur Fourier-Transformation auf  $L^1(\mathbb{R}^n)$  und  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , d.h.,  $\widehat{\widehat{T}f} = \widehat{f}$  für  $f \in L^1(\mathbb{R})$  und  $\widehat{\widehat{T}f} = Pf$  für  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

**Satz 4.3.7** (i) Die Fourier-Transformation ist eine stetige lineare injektive Abbildung von  $\mathcal{S}'_n \rightarrow \mathcal{S}'_n$  der Periode 4, deren Inverse auch stetig ist. Hierbei ist  $\mathcal{S}'_n$  mit der schwach-\* Topologie versehen.

(ii) Wenn  $T \in \mathcal{S}'_n$  und  $Q$  ein Polynom, dann

$$(Q(D)T)^\wedge = Q\widehat{T} \quad \text{und} \quad (QT)^\wedge = Q(-D)\widehat{T}.$$

**Aufgabe 4.3.8** Beweisen Sie diesen Satz.

**Beispiel 4.3.9** Polynome definieren temperierte Distributionen.

**Frage:** Wie sieht deren Fourier-Transformierte aus?

$$\langle 1, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \cdot \varphi(x) dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dm_n(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_n.$$

Daraus folgt

$$\langle \widehat{1}, \varphi \rangle = \langle 1, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x) dm_n(x) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_n,$$

und weiter

$$\langle \widehat{\delta_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dm_n(x) = \langle 1, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_n.$$

Sei  $Q$  ein beliebiges Polynom auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$(Q(D)\delta_0)^\wedge = Q \cdot 1 = Q$$

und

$$\widehat{Q} = (Q \cdot 1)^\wedge = Q(-D)\widehat{1} = Q(-D)\delta_0.$$

Beachte, dass aufgrund der Symmetrie gilt

$$(\widehat{\delta_0})^\wedge = \delta_0.$$