Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Brigitte Forster
Dipl. Math. Stefan Held

Sommersemester 2011
Übungsblatt 2

Fourier-Analysis

Es sei $\mathbb{T} := [-\pi, \pi]$ als Torus bezeichnet.

Aufgabe 6 (Faltung)
Es seien $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Zeigen Sie:

a) *Die Funktion $x \mapsto f(y-x)g(x)$ ist für fast alle $y \in \mathbb{T}$ absolut integrierbar.*

b) *Für*

$$h(y) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(y-x)g(x)dx$$

gilt $h \in L^1(\mathbb{T})$ und $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Definition 4 (Faltung)**.** *Es seien $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Die Funktion $f * g := h \in L^1(\mathbb{T})$ heißt Faltung von f mit g.*

c) *Für die Fourierkoeffizienten gilt*

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \cdot \widehat{g}(n), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

d) *$(L^1(-\pi, \pi), +, *)$ ist eine kommutative Algebra.*

e) *Sei $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$. Dann gilt*

$$f * P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \widehat{f}(n) e^{int} \in L^1(\mathbb{T}).$$

f) *Interpretieren Sie das Fejérpolynom einer Funktion als Faltung geeigneter Funktionen.*

Aufgabe 7 (Beispiele von Fourierreihen)

a) *Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von*

1) *der charakteristischen Funktion $f_1 = \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}$ des Intervalls $[-\pi/2, \pi/2]$.*
2) *$f_2(x) = x$.*
3) *$f_3(x) = x^2$.*

b) *Plotten Sie die resultierende Approximation $S_N(T) := \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}_{[-\pi/2,\pi/2]}(n) e^{int}$ für $N = 1, 5, 10$ und $N = 50$ mit einem Programm Ihrer Wahl. Was beobachten Sie? Nutzen Sie Ihre Erkenntnisse von Blatt 1 um Ihre Beobachtungen zu interpretieren.*

c) *Plotten Sie die entsprechenden Fejérpolynome und vergleichen Sie die Ergebnisse.*