Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Brigitte Forster
Dipl. Math. Stefan Held

Sommersemester 2011
Übungsblatt 5

Fourier-Analysis

Aufgabe 17 (Invariante Räume unter der Fouriertransformation)

a) Es sei

$$\mathcal{H}_0(\mathbb{R}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \ f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \text{ f.ü.}\}$$

der Unterraum der geraden Funktionen und

$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \ f(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \text{ f.ü.}\}$$

der Unterraum der ungeraden Funktionen. Zeigen Sie, dass diese Räume invariant unter der Fouriertransformation sind, dass heißt

$$f \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{F}(f) \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}), \ \forall l = 0, 1.$$

b) Es sei

$$\mathcal{H}_0(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : f(x) = f(|x|) \text{ f.ü.}\}.$$

Der Raum der radialen Funktionen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}_0(\mathbb{R}^n)$ invariant unter der Fouriertransformation ist.

Aufgabe 18 (Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$)
Es seien sowohl $f, u(\,\cdot\,, t), u_t(\,\cdot\,, t), u_x(\,\cdot\,, t), u_{xx}(\,\cdot\,, t)$ als auch ihre Fouriertransformierten Elemente von $L^1 \cap C(\mathbb{R})$.

Lösen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - k u_{xx} = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0,$$

mit Anfangswerten

$$u(x, 0) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 19
Berechnen Sie die Fourier-, bzw.Planchereltransformierte folgender Funktionen:

a) Die charakteristische Funktion des Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$: $\chi_{[a,b]}$.

b) Der Gaußkern $G(x) := e^{-\pi x^2}$.

Definition 10 (Hermitepolynome und Hermitefunktionen)**.** *Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Das n-te Hermitepolynom ist definiert als*

$$H_n(x) := (-1)^n e^{2\pi x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-2\pi x^2}.$$

Die n-te Hermitefunktion ist

$$h_n(x) := \frac{1}{n!} e^{-\pi x^2} H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\pi x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-2\pi x^2}.$$

Aufgabe 20 (Eigenschaften der Hermitepolynome)
Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

a) *Berechnen Sie die ersten drei Hermitepolynome (also H_n für $n = 0, 1, 2$).*

b) $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{4\pi x t - 2\pi t^2}, \ \forall t, x \in \mathbb{R}.$

c) *H_n ist ein Polynom des Grades n.*

d) $H_{n+1}(x) - 4\pi x H_n(x) + 4\pi n H_{n-1}(x) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$, *falls* $H_{-1}(x) := 0$.

e) $H_n''(x) - 4\pi x H_n'(x) + 4\pi n H_n(x) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$

f) $\forall n \neq m$ *gilt* $\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) e^{-2\pi x^2} dx = 0$

Aufgabe 21 (Eigenfunktionen der Planchereltransformation)
Es sei $f \in L^2(\mathbb{R})$

a) *Für die Plancherelltransformation gilt:*

$$P_{2\pi}(P_{2\pi}(f)) = f(-\,\cdot\,)$$

Zeigen Sie:

b) $h_n \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}).$

c) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ P_{2\pi}(h_n) = \mathcal{F}_{2\pi}(h_n)) = (-i)^n h_n.$

d) *Die normierten Hermitefunktionen* $\{w_n := \frac{h_n}{\|h_n\|_2}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ *bilden eine Orthonormalbasis des* $L^2(\mathbb{R})$.

e) $f = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \langle f, w_n \rangle w_n.$

f) $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} |\langle f, w_n \rangle|.$

g) $P_{2\pi}(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (-i)^n \langle f, w_n \rangle w_n.$

h) *Plotten Sie Hermitepolynome und Hermitefunktionen bis zum Grad $n = 5$.*