Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Brigitte Forster
Dipl. Math. Stefan Held

Sommersemester 2011
Übungsblatt 6

Fourier-Analysis

Definition 11 (Raum der Testfunktionen und eine metrisierbare Topologie)**.** *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Die Menge der Testfunktionen*

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) : \textit{supp}(f) \ \textit{ist kompakt}\}$$

ist mit punktweiser Addition und skalarmultiplikation ein Vektorraum.

Durch folgende Normen ist eine Topologie σ auf $\mathcal{D}(\Omega)$ gegeben:

$$\|\phi\|_N := \max\{|D^\alpha \phi(x)| : \ x \in \Omega, \ |\alpha| \leq N\}.$$

Aufgabe 22 (Metrisierbarkeit und Unvollständigkeit von $(\mathcal{D}(\Omega), \sigma)$)
Zeigen Sie:

a) *Die Normen $\| \cdot \|_N$ bilden eine lokal-konvexe, metrisierbare Topologie σ auf $\mathcal{D}(\Omega)$.*

b) *$(\mathcal{D}(\Omega), \sigma)$ ist nicht vollständig.*

Aufgabe 23 (Distributionen am Beispiel der Dirac-distribution)
Es sei $\delta_x(\phi) = \phi(x), \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \ x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

a) $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

b) $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

c) $\mathcal{F}(\delta_0) = 1$.

d) $\mathcal{F}(\partial^\alpha \delta_0) = (2\pi i x)^\alpha$.

e) $\mathcal{F}(\delta_x) = e^{-2\pi i \langle x, \cdot \rangle}$.

f) $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \ \phi * \delta_0 = \phi$

Definition 12 (Gaborsysteme)**.** *Es sei $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ein Gaborsystem auch Short Time Fourier-transformation (STFT) genannt ist definiert als*

$$G_g := \{M_b T_a g\}_{a \in A, \, b \in B}$$

wobei A, B abzählbar oder auch überabzählbar sein können.

g wird als Fensterfunktion des Gaborsystems G_g bezeichnet.

Aufgabe 24 (Eine Gaborbasis des $L^2(\mathbb{R})$)
Zeigen Sie:

a) *Das Gaborsystem im $L^2(\mathbb{R})$ zur Fensterfunktion $g = \chi_{[-1/2,1/2]}$ mit $A = B = \mathbb{Z}$ ist eine Orthonormalbasis des $L^2(\mathbb{R})$.*

b) $\int_{\mathbb{R}} x^2 |g(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2 d\xi = \infty$, *dass heißt die Fensterfunktion g ist schlecht lokalisiert.*

Definition 13 (Waveletsysteme – das Haarwavelet)**.** *Es sei* $\psi \in L^2(\mathbb{R})$*. Ein Waveletsystem ist definiert als*

$$\Psi := \{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}} := \{D_2^j T_k \psi\}_{j,k\in\mathbb{Z}} = \{2^{j/2}\psi(2^j\ \cdot\ - k)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}.$$

Die Funktion ψ *wird als Mutterwavelet bezeichnet.*

Das Haarmutterwavelet ist definiert durch

$$\psi = \chi_{[0,1/2[} - \chi_{]1/2,1]}.$$

Die Haarschen Funktionen $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *sind definiert wie folgt: Für* $n \in \mathbb{N},\ n = 2^j + k$*, wobei* $j \in \mathbb{N}_0,\ k = 1, \ldots, 2^{k-1}$*, setze* $h_n(t) = \psi_{j,k}(t)$ *auf* $[0,1[$ *und ergänze diese Funktionen stetig für t=1; ferner sei* $h_0(t) = 1,\ \forall t \in [0,1]$*.*

Aufgabe 25 (Das Haarwaveletsystem - eine Basis des $L^2(\mathbb{R})$)

a) *Skizzieren Sie die Haarwavelets* $\psi_{j,k}$ *für* $j,k \in \{-1,0,1\}$ *und die Haarfunktionen für* $n \in \{0,1,2,3\}$*.*

b) *Zeigen Sie, dass die Familie der Haarfunktionen* $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ein Orthonormalsystem in* $L^2(0,1)$ *ist und dass die Familie der Haarwavelets* $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *ein Orthonormalensystem in* $L^2(\mathbb{R})$ *ist.*

c) $f \mapsto \sum_{n=0}^{2^m-1} \langle f, h_n\rangle\, h_n$ *ist die Orthogonalprojektion auf den Unterraum der auf den Intervallen* $[r2^{-m}, (r+1)2^{-m}[$ *konstanten Funktionen in* $L^2(0,1)$*.*

d) *Für* $f \in C[0,1]$ *konvergiert die Reihe* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \langle f, h_n\rangle\, h_n$ *gleichmäßig gegen* f*.*

e) *Die Familie der Haarfunktionen* $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ist eine ONB von* $L^2(0,1)$*.*

f) *Die Familie der Haarwavelets* $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *ist eine ONB von* $L^2(\mathbb{R})$*.*

g) *Geben Sie die Koeffizienten* $\left\langle \chi_{[0,1]}, \psi_{j,k}\right\rangle,\ \forall j,k \in \mathbb{Z}$ *an.*