Dr. Peter Massopust
Dipl. Math. Stefan Held

Splines
Sommersemester 2011

12. Mai 2011

Übungsblatt 1

1. Sei $\{a := x_0 < x_1 < \cdots < x_n =: b\}$ eine Knotenmenge. Zeigen Sie daß

   (a) $[x_0, \ldots, x_n]p = 0$, für alle $p \in \Pi^n$;

   (b) $[x_0, \ldots, x_n]p = \text{const.}$, für alle $p \in \Pi^{n+1}$.

2. Sei $\{a := x_0 < x_1 < \cdots < x_n =: b\}$ eine Knotenmenge und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie, daß
$$[x_0, \ldots, x_n]f = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f(x_\nu)}{\omega'(x_\nu)},$$
wobei $' := \frac{d}{dx}$ and $\omega(x) := \prod_{\nu=0}^{n}(x - x_\nu)$.

3. Sei $\{a := x_0 < x_1 < \cdots < x_n =: b\}$ eine Knotenmenge mit $x_\nu = x_0 + \nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie die folgende explizite Darstellung des dividierten Differenzenoperators:
$$[x_0, \ldots, x_n]f = \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu-1} \binom{n}{\nu} f(x_\nu).$$

4. Sei $\{a := x_0 < x_1 < \cdots < x_n =: b\}$ eine Knotenmenge und $f \in C^n[a, b]$. Beweisen Sie die Formel von Hermite-Genocchi:
$$[x_0, \ldots, x_n]f = \int_{\Sigma^n} f^{(n)}(t_0 x_0 + \cdots + t_n x_n)\, dt_1 \cdots dt_n,$$
wobei $t_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} t_i$ und Σ^n das n-Simplex
$$\Sigma^n := \left\{ (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, \forall i = 1, \ldots, n : t_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^{n} t_i \leq 1 \right\}$$
bezeichnet.