Splines
Sommersemester 2011

Dr. Peter Massopust
Dipl. Math. Stefan Held
19. Mai 2011

Übungsblatt 2

1. Es sei $X := \{x_1, \ldots, x_{n+k}\}$ eine Menge nichtfallender Knoten und $\{B_{\nu k,X} : \nu = 1, \ldots, n\}$ die auf dieser Knotenmenge definierten B-Splines. Man zeige, daß auf $[x_1, x_n]$ gilt:

   (a) $D\left(\sum_{\nu=2-k}^{n-1} c_\nu B_{\nu k,X}\right) = (k-1)\sum_{\nu=3-k}^{n-1} \frac{c_\nu - c_{\nu-1}}{x_{\nu+k-1} - x_\nu} B_{\nu,k-1,X}, \quad c_\nu \in \mathbb{R};$

   (b) $\int_{x_1}^{x} \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu B_{\nu k,X}(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{c_\mu(x_{\mu+k} - x_\mu)}{k}\right) B_{\nu,k+1,X}(x), \quad c_\nu \in \mathbb{R}.$

2. Man zeige, daß die Menge $\mathcal{G}_N^k$ eine Basis für $S_N^k(\mathbb{Z})$ bildet.

3. Man zeige folgende Eigenschaften der Differenzenoperatoren ∇^k und Δ^k.

   (a) $\forall\, k \in \mathbb{N}\, \forall\, p \in \Pi^k$: $\nabla^k p = 0$;

   (b) $\nabla^k f = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} f(\bullet - \nu);$

   (c) $\forall\, k \in \mathbb{N}$: $\Delta^k f = \nabla^k f(\bullet + k)$.