Splines
Sommersemester 2011

Dr. Peter Massopust
Dipl. Math. Stefan Held
26. Mai 2011

Übungsblatt 3

Es sei $k \in \mathbb{N}$ und es bezeichne B_k den kardinalen B-Spline der Ordnung k. Man beweise die folgenden Eigenschaften der kardinalen B-Splines.

1. $\forall f \in C(\mathbb{R})$: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x) B_k(x) dx = \int_{[0,1]^k} f(x_1 + \cdots x_k) dx_1 \cdots dx_k$.
2. $\forall f \in C^k(\mathbb{R})$: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (D^k f)(x) B_k(x) dx = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} f(\nu)$.
3. $B_k = \dfrac{1}{(k-1)!} \nabla^k x_+^{k-1}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} B_k(x - \nu) = 1$.
5. $DB_k = \nabla B_k = B_{k-1} - B_{k-1}(\bullet - 1)$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}$: $B_k(x) = \dfrac{x}{k-1} B_{k-1}(x) + \dfrac{k-x}{k-1} B_{k-1}(x-1)$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}$: $B_k(x + \frac{k}{2}) = B_k(\frac{k}{2} - x)$.
8. $\forall 1 < k \in \mathbb{N}$: $B_k(x) = (B_{k-1} * B_1)(x) = \displaystyle\int_0^1 B_{k-1}(x-t) dt =: \left(\mathop{*}_{i=1}^{k} B_1 \right)(x)$.