Splines
Sommersemester 2011

Dr. Peter Massopust
Dipl. Math. Stefan Held
09. Juni 2011

Übungsblatt 4

1. Zeigen Sie, daß die Funktionale $\Lambda_{\nu\mu}$ und Funktionen $\varphi_{\nu\mu}$ dual zueinander stehen, dh.

$$\Lambda_{\nu\mu}\varphi_{\lambda\varkappa} = \delta_{\nu\lambda}\delta_{\mu\varkappa}$$

gilt für alle $\lambda, \nu = 0, 1, \ldots, n$ und alle $\mu, \varkappa = 1, \ldots, k$. Folgern Sie dann daraus, daß die Funktionenmenge $\{\varphi_{\nu\mu} : \ \nu = 0, 1, \ldots, N; \ \mu = 1, \ldots, k\}$ eine Basis von $\Pi^k_{\boldsymbol{\xi}}$ bildet.

2. Zeigen Sie, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ und Funktionen $f \in C^k(\mathbb{R})$ gilt:

$$k!\,[\xi_\nu, \ldots, \xi_{\nu+k}]f = (D^k f)(\xi_\nu),$$

falls $\xi_\nu = \xi_{\nu+1} = \cdots = \xi_{\nu+k}$.

3. Gegeben sei die Knotenfolge $\{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3\}$. Konstruieren Sie auf dem Interval $[0, 4]$ die dazugehörige Folge von kardinalen B-Splines $\{B_3(\bullet - \nu) : \nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

4. Beweisen Sie, daß die Funktionenmenge $\{J_\nu, S_\nu : \nu = 1, \ldots, N\}$ eine Basis von $\Pi^4_{\boldsymbol{\xi},2}$ ist und jedes $f \in \Pi^4_{\boldsymbol{\xi},2}$ die Darstellung

$$f = \sum_{\nu=1}^{N} [f(\xi_\nu)J_\nu + (Df)(\xi_\nu)S_\nu]$$

besitzt.