. . . .
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Obige Angaben sind richtig:

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		

$\sum$		

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Mathematische Behandlung der Naturwissenschaften II [MA9714]

Semestrale zur Vorlesung SS 2010 für TUM-BWL

Termin: Mittwoch 04.08.2010 09:00 – 10:30 Uhr

Prof. Dr. B. Forster-Heinlein

Hörsaal: . . . . Reihe: . . . . Platz: . . . .

I . . . .
Erstkorrektur

II . . . .
Zweitkorrektur

Hinweise:

Überprüfen Sie die Angabe: Es sind **5 Aufgaben** auf den **Seiten 1 bis 11** !

Jede Aufgabe ist in dem unmittelbar anschließenden eingerahmten Platz zu bearbeiten.

Alle Ergebnisse sind zu begründen.
Zum Bestehen sind voraussichtlich mindestens 17 Punkte nötig!

Das letzte Blatt mit der Aufgabenübersicht kann zur Bearbeitung abgetrennt werden.

Bei eventueller vorzeitiger Beendigung der Prüfung ist dieses Blatt mit abzugeben.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von . . . . bis . . . .

Vorzeitig abgegeben um . . . .

Besondere Bemerkungen:

Aufgabe 1 (ca. 9 Punkte)

I	II

Die Bewegung eines Federpendels werde durch die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = F(t) \qquad (*)$$

beschrieben. Es sei dazu die allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1 e^{-t}\cos(t) + C_2 e^{-t}\sin(t) + 3\cos(2t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

bekannt.

a) Extrahieren Sie aus der angegebenen Lösung $x(t)$ die homogene Lösung $x_h(t)$ und eine spezielle Lösung $x_s(t)$!

b) Welche äußere Kraft $F(t)$ wirkt auf das Pendel?

c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung $\widetilde{x}(t)$ von $(*)$ für den Fall $F(t) = e^{-3t}$!

---

a)

$$x_h(t) = C_1 e^{-t}\cos(t) + C_2 e^{-t}\sin(t), \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$
$$x_s(t) = 3\cos(2t). \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

b) Wir setzen $x_s(t) = 3\cos(2t)$ in $(*)$ ein. Mit

$$\dot{x}_s(t) = -6\sin(3t),$$
$$\ddot{x}_s(t) = -12\cos(2t)$$

ergibt sich

$$\frac{1}{2}(-12\cos(2t)) - 6\sin(2t) + 3\cos(2t) = F(t),$$
$$\iff \; -3\cos(2t) - 6\sin(2t) = F(t). \quad \boxed{\textbf{3 P.}}$$

c) Ansatz vom Typ der rechten Seite: Einsetzen von

$$\widetilde{x}_s(t) = Ce^{-3t}, \quad C \in \mathbb{R},$$
$$\dot{\widetilde{x}}_s(t) = -3Ce^{-3t},$$
$$\ddot{\widetilde{x}}_s(t) = 9Ce^{-3t}.$$

in $(*)$ ergibt

$$\frac{1}{2}9Ce^{-3t} + -3Ce^{-3t} + Ce^{-3t} = e^{-3t}$$
$$\iff \; \frac{5}{2}C = 1$$
$$\iff \; C = \frac{2}{5}. \quad \boxed{\textbf{3 P.}}$$

Zusammen mit a) ergibt sich

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}_s(t) + x_h(t) = \frac{2}{5}e^{-3t} + C_1 e^{-t}\cos(t) + C_2 e^{-t}\sin(t). \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

I	II

Es sei eine Matrix A definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A!

b) Geben Sie einen Eigenvektor $\vec{c}$ zu einem beliebigen Eigenwert von A an!

---

a) Aus

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 4 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)((2-\lambda)^2 - 4) \\ &= (3-\lambda)(4\lambda - \lambda^2) = (3-\lambda)\lambda(4-\lambda) \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

folgt, dass die Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3, \quad \boxed{\textbf{1 P.}} \\ \lambda_2 &= 0, \quad \boxed{\textbf{1 P.}} \\ \lambda_3 &= 4, \quad \boxed{\textbf{1 P.}} \end{aligned}$$

sind.

b) $\vec{c} = (0, 0, 1)^T$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 3, denn

$$A\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\vec{c}. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Auch möglich:

- Zu $\lambda_2 = 0$:

$$\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Zu λ_3 :

$$\vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alle skalaren Vielfache von $\vec{c}_i$ sind auch zulässig.

I	II

Es sei der Körper K gegeben durch

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq z,\ 0 \leq z \leq 4\right\}.$$

a) Berechnen Sie das Volumen V von K!

(Zur Kontrolle: $V = 8\pi$.)

b) Bestimmen Sie den geometrischen Mittelpunkt $M = (x_m, y_m, z_m)$ von K!

---

a) Wir benutzen Zylinderkoordinaten

$$(x,y,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z). \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Das Volumenelement ist bekannterweise (vgl. Vorlesung bzw. Übung) gegeben durch

$$d(x,y,z) = r\ d(r,\varphi,z). \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Der Parameterbereich ist

$$P = \left\{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} :\ 0 \leq r \leq \sqrt{z}, 0 \leq z \leq 4\right\}. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Zusammensetzen ergibt

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_K 1\ d(x,y,z) = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{2\pi} r\ d\varphi dr dz \\
&= 2\pi \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} r\ dr dz \\
&= 2\pi \int_0^4 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{z}} dz \\
&= \pi \int_0^4 z\ dz = \pi \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi. \quad \boxed{\textbf{2 P.}}
\end{aligned}$$

(Bei anderem Lösungsweg auch insgesamt 5 Punkte).

b) Da K symmetrisch um die $z-$Achse ist, gilt

$$\begin{aligned}
x_m &= 0, \quad \boxed{\textbf{1 P.}} \\
y_m &= 0. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}
\end{aligned}$$

Es bleibt

$$\begin{aligned}
z_m &= \frac{1}{V} \iiint_K z\ d(x,y,z) = \frac{1}{V} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{2\pi} zr\ d\varphi dr dz \\
&= 2\pi \frac{1}{V} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} zr\ dr dz \\
&= 2\pi \frac{1}{V} \int_0^4 z \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{z}} dz \\
&= \pi \frac{1}{V} \int_0^4 z^2\ dz \\
&= \pi \frac{1}{V} \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^4 = \frac{\pi}{8\pi} \frac{4^3}{3} = \frac{8}{3}. \quad \boxed{\textbf{3 P.}}
\end{aligned}$$

Der Zuckerhut von Rio lässt sich durch den Graphen der Funktion

$$f(x, y) = 400 - x^2 - y^2$$

beschreiben mit dem Definitionsbereich

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 400\right\}.$$

Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Zuckerhutes!
Hinweis: Für $a, C \in \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $\sqrt{a^2 + u^2}\ u$ gegeben durch

$$\int \sqrt{a^2 + u^2}\ u\ du = \frac{1}{3}\left(a^2 + u^2\right)^{3/2} + C.$$

Der Zuckerhut ist eine Rotationsfläche um die $z-$Achse der Funktion

$$g(r) = 400 - r^2$$

mit

$$\begin{aligned} &0 \leq r^2 \leq 400, \\ \Longleftrightarrow\ &0 \leq r \leq 20. \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned} O =& 2\pi \int_0^{20} \sqrt{1 + g'(r)^2}\ r\ dr \\ &= 2\pi \int_0^{20} \sqrt{1 + (-2r)^2}\ r\ dr \\ &= 2\pi \int_0^{20} \sqrt{1 + 4r^2}\ r\ dr \\ &= 2\pi \int_0^{20} 2\sqrt{\frac{1}{4} + r^2}\ r\ dr \\ &= 4\pi \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} + r^2\right)^{3/2}\right]_0^{20} \\ &= \frac{4}{3}\left[(400 + \frac{1}{4})^{3/2} - \frac{1}{4}^{3/2}\right] \\ &= \frac{4}{3}\left[(400 + \frac{1}{4})^{3/2} - \frac{1}{8}\right]. \quad \boxed{\textbf{6 P.}} \end{aligned}$$

(Es sind auch Lösungen über Parametrisierung in Zylinderkoordinaten oder über Parametrisierung eines Funktionsgraphen möglich.)

Aufgabe 5 (ca. 11 Punkte)

I	II

Es sei die Kurve Γ im $\mathbb{R}^2$ gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{cases} \left(t, t^3\right)^T & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ (2-t, 2-t)^T & \text{für } 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Kurve Γ!

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral von

$$g(x, y) = \sqrt{1 + 9xy}$$

über das erste Kurvenstück zwischen $0 \leq t \leq 1$!

Es sei nun ein Vektorfeld $\vec{v}$ durch

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2xy + e^{xy}y \\ x^2 + e^{xy}x \end{pmatrix}$$

für alle $\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben.

c) Geben Sie die Integrabilitätsbedingungen für $\vec{v}$ an und prüfen Sie, ob diese erfüllt sind!

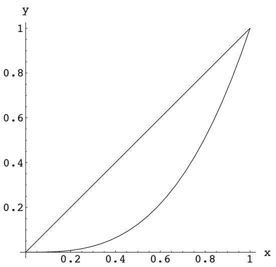
d) Geben Sie eine Stammfunktion $f(\vec{x})$ von $\vec{v}(\vec{x})$ an!

e) Bestimmen Sie das Integral $\displaystyle\int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{x}$!

---

a)

$$\vec{\gamma}\,(0) = (0, 0),$$
$$\vec{\gamma}\,(1) = (1, 1),$$
$$\vec{\gamma}\,(2) = (0, 0).$$



$\boxed{\textbf{1 P.}}$

Die Kurve setzt sich also zusammen aus dem Funktionsgraphen einer t^3-Funktion im Bereich $0 \leq t \leq 1$ und einer geraden Strecke zwischen $(1, 1)$ und $(0, 0)$.

b) Es bezeichne Γ_1 bzw. $\vec{\gamma}_1(t)$ das erste Kurvenstück. Das Bogenelement ist

$$ds = \left|\dot{\vec{\gamma}}_1(t)\right| \, dt = \left|(1, 3t^2)^T\right| \, dt = \sqrt{1 + 9t^4} \, dt. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \sqrt{1 + 9xy} \, ds &= \int_0^1 \sqrt{1 + 9t\, t^3} \sqrt{1 + 9t^4} \, dt \quad \boxed{\textbf{1 P.}} \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + 9t^4} \sqrt{1 + 9t^4} \, dt \\ &= \int_0^1 1 + 9t^4 \, dt \\ &= \left[t + \frac{9}{5}t^5\right]_0^1 = 1 + \frac{9}{5} = \frac{14}{5}. \quad \boxed{\textbf{1 P.}} \end{aligned}$$

c) Bezeichnung der Komponenten:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ v_2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + e^{xy}y \\ x^2 + e^{xy}x \end{pmatrix}.$$

Ableiten der Komponenten ergibt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} v_1 &= 2x + e^{xy} + ye^{xy}x = 2x + e^{xy} + e^{xy}xy, \\ \frac{\partial}{\partial x} v_2 &= 2x + e^{xy} + xe^{xy}y = 2x + e^{xy} + e^{xy}xy. \quad \boxed{\textbf{1 P.}} \end{aligned}$$

Die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial y} v_1 = \frac{\partial}{\partial x} v_2$$

ist also erfüllt. $\boxed{\textbf{1 P.}}$

d) Wir berechnen

$$f(\vec{x}) = \int v_1(x, y)\ dx = \int 2xy + e^{xy}y\ dx = x^2y + e^{xy} + C(y).$$

mit einer Funktion $C(y)$, die nur von y abhängt. Ableiten nach y ergibt

$$\frac{\partial}{\partial y} f(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + e^{xy} + C(y)) = x^2 + e^{xy}x + C'(y) \stackrel{!}{=} v_2(\vec{x}) = x^2 + e^{xy}x,$$

woraus $C'(y) = 0$ und damit $C(y) = C$ mit $C \in \mathbb{R}$ folgt. Damit ist

$$f(\vec{x}) = x^2y + e^{xy} + C$$

eine Stammfunktion von $\vec{v}$. $\boxed{\textbf{3 P.}}$

(Oder Angeben einer Stammfunktion und Nachrechnen, ob Ableitungen mit $\vec{v}$ übereinstimmen.)

e) Da $\vec{v}$ eine Stammfunktion besitzt und Γ eine geschlossene Kurve ist $\boxed{\textbf{1 P.}}$, gilt

$$\int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{x} = 0. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$