

Wavelets zur Tomosynthese

Jürgen Frikel – M6, Zentrum Mathematik, Technische Universität München



Problemstellung

Tomosynthese ist eine spezielle Art der 3D-Röntgentomographie, die zur Brustkrebsdiagnose eingesetzt wird. Die Brust wird aus mehreren Winkeln durchleuchtet und anschließend das 3D-Volumen rekonstruiert, vgl. Abbildung rechts.

Medizinische und technische Einschränkungen:

- Geringer Winkelbereich (ca. 40°) und wenige Röntgenaufnahmen (ca. 15) \Rightarrow wenige Daten.
- Geringe Strahlungsdosis \Rightarrow hohes Rauschen in den Aufnahmen.

Mathematisch wird der Messprozess durch die Röntgentransformation beschrieben:

$$\mathcal{P} : L^2(\Omega^d) \rightarrow L^2(T^{d-1}), \quad \mathcal{P}f(\theta_l, x_i) = \int_{\mathbb{R}} f(x_i + t\theta_l) dt, \quad (\theta_l \in S^{d-1}, x_i \in \theta_l^\perp).$$

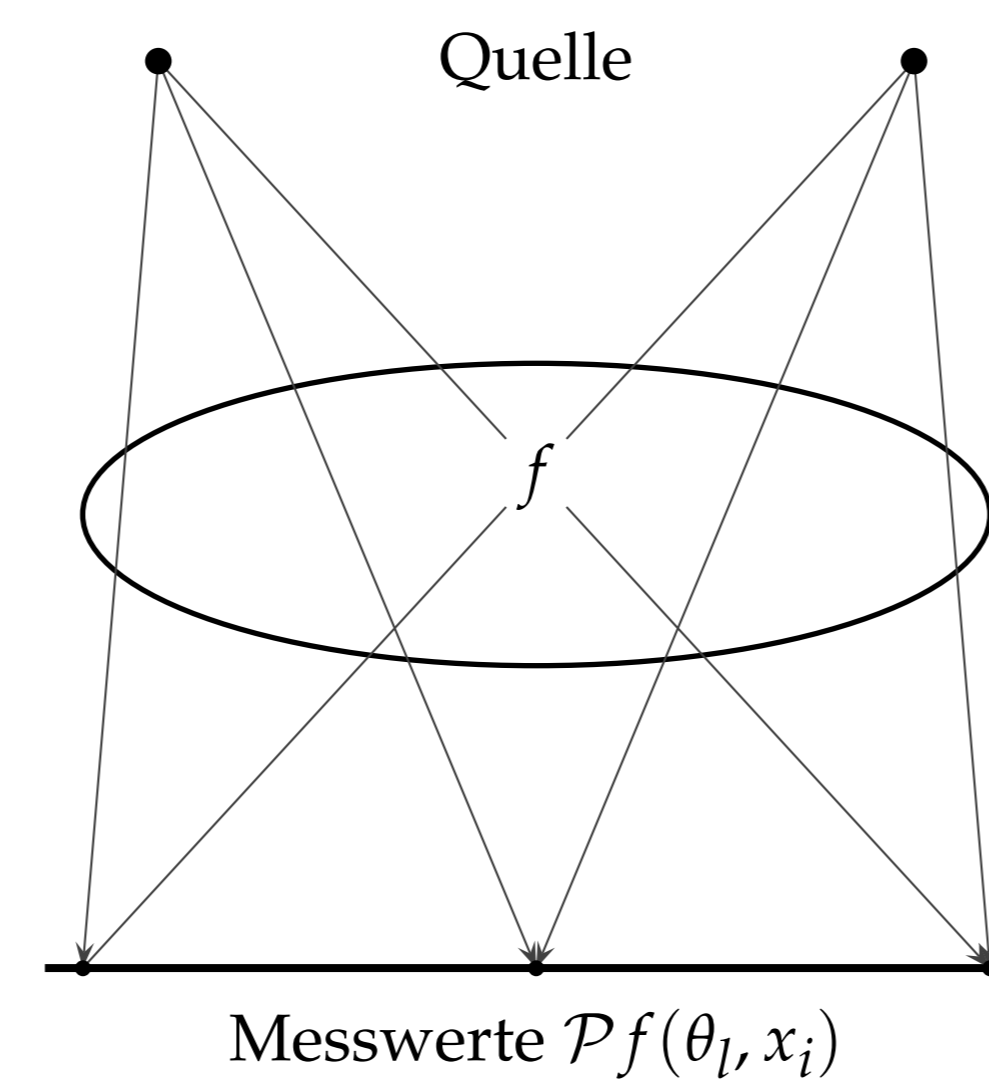
In der Praxis wird der lineare Operator \mathcal{P} durch eine Matrix P und das zu rekonstruierende 3D-Bild durch einen Vektor $f = (f_n)_n \in \mathbb{R}^N$ dargestellt. Nach der Durchstrahlung stehen $M \in \mathbb{N}$ Messwerte $y := (y_k)_k \in \mathbb{R}^M$ zur Verfügung, die mit Rauschen $\eta \in \mathbb{R}^M$ überlagert sind.

\rightsquigarrow **Rekonstruktionsproblem:** Bestimme f so, dass $y = Pf + \eta$.

Wegen den obengenannten Einschränkungen ist das Rekonstruktionsproblem nicht eindeutig lösbar und schlecht gestellt: Kleine Störungen der Messdaten können zu großen Fehlern in der Rekonstruktion führen, [Nat86].

\rightsquigarrow Klassische Rekonstruktionsalgorithmen, wie die gefilterte Rückprojektion, sind instabil.

Idee: Integration von a-priori Glattheitsinformation in den Rekonstruktionsprozess, [RVJ⁺06].



Charakterisierung der Besov-Räume durch Wavelets

Problem: Algorithmische Auswertung der Besov-Norm (1) sehr schwierig.

Lösung: Charakterisierung der Besov-Norm anhand der Wavelet-Koeffizienten von f .

Es seien $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ die Skalierungsfunktion und $\psi^{(l)} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $l = 1, \dots, 2^d - 1$, die zugehörigen Wavelets, die gewisse moderate Abklingbedingungen erfüllen. Dann definiert

$$\|f\|_{p,\alpha,q}^* = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\langle f, \Phi_{0,k} \rangle|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j \geq 0} \left[2^{j(\alpha+1/2-1/p)} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{l=1}^{2^d-1} |\langle f, \psi_{j,k}^{(l)} \rangle|^p \right)^{1/p} \right]^q \right)^{1/q}$$

eine äquivalente Norm auf $B_{\alpha,q}^p(\mathbb{R}^d)$ aus Wavelet-Koeffizienten $\langle f, \psi_{j,k}^{(l)} \rangle$, [Woj97].

Es bezeichne W die diskrete Wavelet-Transformation. Dann gilt $f = W^T w_f$, wobei $w_f = Wf$. Damit lässt sich der Ausdruck in (2) umschreiben zu

$$w_{MAP} = \arg \min_w \left(\frac{\|y - PW^T w\|_2^2}{2\sigma^2} + \lambda \|W^T w\|_{p,\alpha,q}^* \right).$$

\rightsquigarrow Man kann in effizienter Weise die Skalierungs- und Waveletkoeffizienten von f_{MAP} berechnen. Im letzten Schritt erhält man die maximum a-posteriori Schätzung durch die Wavelet-Rekonstruktion

$$f_{MAP} = W^T w_{MAP}.$$

Die Idee der statistischen Inversion

Alle Vektoren werden als Realisierungen absolut stetiger Zufallsvektoren interpretiert und die a-posteriori Dichte $\pi(f|y)$ mit Hilfe der Bayes'schen Formel $\pi(f|y) \propto \pi(y|f)\pi(f)$ bestimmt, [KS05]. Eine Rekonstruktion erhält man mittels des *maximum a-posteriori Schätzers*

$$f_{MAP} = \arg \max_f \pi(y|f)\pi(f).$$

Hierbei kodiert $\pi(f)$ die a-priori Information und $\pi(y|f)$ beschreibt das statistische Modell des Messvorgangs. Unter der Annahme, dass das Rauschen weiß ist, d.h. $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, und f genügend glatt ist, ergibt sich

$$\pi(y|f) = C \exp \left(-\frac{\|y - Pf\|_2^2}{2\sigma^2} \right) \quad \text{und} \quad \pi(f) = C \exp \left(-\lambda \|f\|_{p,\alpha,q} \right).$$

Die Glattheit wird dabei in einer sehr allgemeinen Art und Weise durch die Besov-Norm

$$(1) \quad \|f\|_{p,\alpha,q} = \|f\|_p + \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{-\alpha} \omega_p^m(f;t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 1 \leq q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{-\alpha} \omega_p^m(f;t), & q = \infty \end{cases}$$

gemessen, wobei $\omega_p^m(f;t)$ der p -Glattheitsmodul der Ordnung m ist und $1 \leq p, q \leq \infty$, $\alpha > 0$, $m \in \mathbb{N}$ mit $\alpha < m$. Insgesamt erhält man:

$$(2) \quad f_{MAP} = \arg \min_f \left(\frac{\|y - Pf\|_2^2}{2\sigma^2} + \lambda \|f\|_{p,\alpha,q} \right).$$

Fazit

Statistische Formulierung des Problems ermöglicht Integration von a-priori Glattheitsinformation

\rightsquigarrow Stabilisierung des Rekonstruktionsproblems.

Charakterisierung der Glattheit anhand der Wavelet-Koeffizienten

\rightsquigarrow Effiziente algorithmische Berechnung.

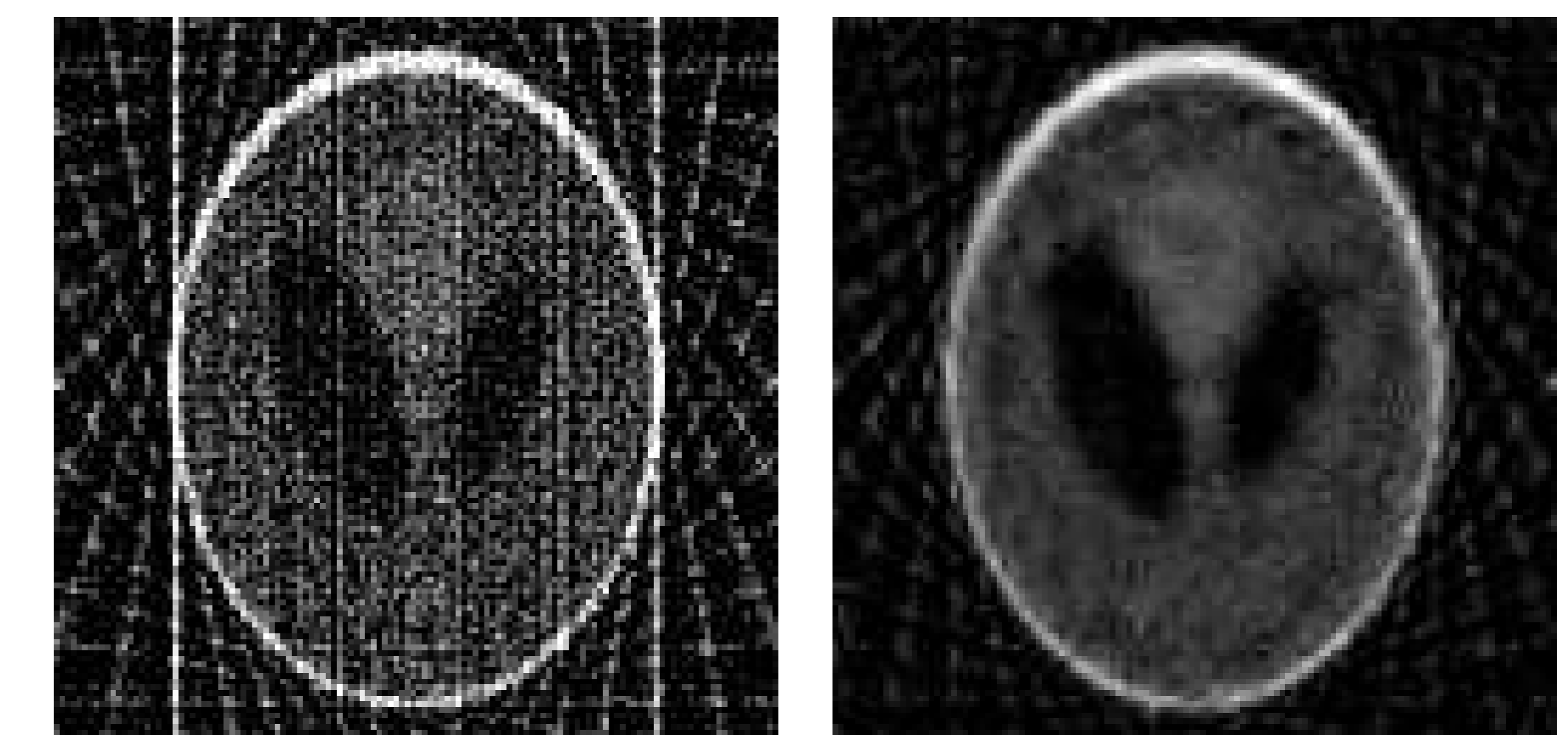


Abbildung: Rekonstruktion des Shepp-Logan-Headphantom bei $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $\Delta\theta = 10^\circ$ und Rauschanteil 3%. Links: Klassische Rekonstruktion durch gefilterte Rückprojektion. Rechts: Statistische Rekonstruktion mit Besov-Norm Prior. Man erkennt hier deutlich den höheren Glattheitsgrad der statistische Rekonstruktion.

Literatur

- [KS05] Jari Kaipio and Erkki Somersalo, *Statistical and Computational Inverse Problems*, Applied Mathematical Sciences, vol. 160, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [Nat86] F. Natterer, *The mathematics of computerized tomography*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1986.
- [RVJ⁺06] Maarja Rantala, Simopekka Vänskä, Seppo Järvenpää, et al., *Wavelet-based reconstruction for limited angle x-ray tomography*, IEEE Transactions on Medical Imaging **25** (2006), no. 2, 210–217.
- [Woj97] P. Wojtaszczyk, *A mathematical introduction to wavelets*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 37, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

Aufgabensteller und Betreuer

Prof. Dr. Brigitte Forster-Heinlein

In Kooperation mit

image **diagnost**