6 Das Maximumprinzip

Aus der Mittelwerteigenschaft des Laplace-Operators (siehe z.B. Kapitel 1 im Skript Partielle Differentialgleichungen, Teil 1) folgt: Ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine auf einem beschränkten Gebiet Ω definierte subharmonische Funktion, also

$$-\Delta u \leq 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{6.1}$$

so ist entweder u konstant, oder es gilt

$$u(x) < \max_{y \in \partial\Omega} u(y)\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{6.2}$$

Dieser Sachverhalt bleibt richtig, wenn man den Laplace-Operator in (6.1) durch einen allgemeinen elliptischen Operator 2. Ordnung ersetzt, und er läßt sich auch auf zugehörige parabolische Gleichungen, etwa

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \tag{6.3}$$

übertragen. Wir betrachten einen Operator L der Form

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_j\partial_i u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u + c(x)u\,. \tag{6.4}$$

Man beachte, dass L nicht in Divergenzform geschrieben ist, diese würde sich aus (6.4) ergeben zu

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i u) + \sum_{i=1}^{n}\left(b_i(x) + \sum_{j=1}^{n}\partial_j a_{ij}(x)\right)\partial_i u + c(x)u\,.$$

Voraussetzung 6.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, seien $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{\Omega})$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.* □

Erinnerung: Der Differentialoperator L aus (6.4) heißt **gleichmäßig elliptisch**, wenn es ein $c_a > 0$ gibt mit

$$\xi^T A(x)\xi = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i a_{ij}(x)\xi_j \geq c_a|\xi|^2\,, \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega. \tag{6.5}$$

Eine etwas schwächere Forderung ist

$$\xi^T A(x)\xi \geq 0\,, \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega, \tag{6.6}$$

$$\text{es gibt ein } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \xi^T A(x)\xi > 0 \text{ für alle } x \in \overline{\Omega}. \tag{6.7}$$

Hat $u \in C^2(\Omega)$ in $x \in \Omega$ ein Maximum, so gilt

$$\nabla u(x) = 0\,, \quad D^2u(x) \leq 0\,, \tag{6.8}$$

das heißt, die Hesse-Matrix $D^2u(x)$ ist negativ semidefinit. Hieraus folgt sofort

$$-\Delta u(x) \geq 0\,, \tag{6.9}$$

und man kann also schließen: Gilt $-\Delta u < 0$ in Ω, so kann u kein Maximum in Ω haben.

Lemma 6.2 *Seien $B, C \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ positiv semidefinit, sei C symmetrisch. Dann gilt*

$$\mathrm{spur}\,(BC) \geq 0\,. \tag{6.10}$$

Beweis: Man betrachtet zuerst den Fall, dass C eine Diagonalmatrix ist, und führt den allgemeinen Fall darauf zurück. Details siehe Übung. $\square$

Satz 6.3 (Schwaches Maximumprinzip, elliptischer Operator)
Es gelte Voraussetzung (6.1) sowie (6.6), (6.7). Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit

$$Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{6.11}$$

das heißt, $(Lu)(x) \leq 0$ für alle $x \in \Omega$. Es gelte außerdem $c = 0$. Dann gilt

$$\max_{y\in\overline{\Omega}} u(y) = \max_{y\in\partial\Omega} u(y)\,. \tag{6.12}$$

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall, dass $Lu < 0$ in Ω gilt. Wäre $x \in \Omega$ Maximalstelle von u, so wäre $\nabla u(x) = 0$ und

$$(Lu)(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_j\partial_i u(x) = -\mathrm{spur}\,(A(x)D^2u(x)) \geq 0\,,$$

nach Lemma 6.2, da $-D^2u(x)$ positiv semidefinit und symmetrisch ist. Es folgt (6.12) im Falle $Lu < 0$. Sei nun $Lu \leq 0$ in Ω. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\gamma\langle x,\xi\rangle}\,, \tag{6.13}$$

wobei ξ gemäß (6.7) gewählt und $\gamma > 0$ später festgelegt wird. Differenzieren liefert

$$\begin{aligned}\partial_i u_\varepsilon(x) &= \partial_i u(x) + \varepsilon\gamma\xi_i e^{\gamma\langle x,\xi\rangle}\,,\\ \partial_j\partial_i u_\varepsilon(x) &= \partial_j\partial_i u(x) + \varepsilon\gamma^2\xi_i\xi_j e^{\gamma\langle x,\xi\rangle}\,.\end{aligned}$$

Es folgt

$$(Lu_\varepsilon)(x) = (Lu)(x) - \varepsilon\gamma e^{\gamma\langle x,\xi\rangle}[\gamma\xi^T A(x)\xi - \langle\xi, b(x)\rangle]\,. \tag{6.14}$$

Wir wählen γ so groß, dass die eckige Klammer einen Wert > 0 hat für alle $x \in \Omega$; dies ist möglich nach (6.7), da $\overline{\Omega}$ kompakt und A und b stetig sind, man beachte außerdem, dass γ nicht von ε abhängt. Es folgt

$$Lu_\varepsilon < 0 \quad \text{in } \Omega, \text{ für alle } \varepsilon > 0,$$

also nach dem ersten Teil des Beweises

$$\max_{y\in\overline{\Omega}} u_\varepsilon(y) = \max_{y\in\partial\Omega} u_\varepsilon(y)\,.$$

Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert die Behauptung. $\square$

Ersetzt man in Satz 6.3 die Voraussetzung (6.11) durch

$$Lu \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{6.15}$$

so können wir den Satz auf $-u$ anwenden und erhalten

$$\min_{y \in \overline{\Omega}} u(y) = \min_{y \in \partial\Omega} u(y)\,. \tag{6.16}$$

Ist also u eine klassische Lösung der elliptischen Gleichung

$$Lu = 0 \tag{6.17}$$

in Ω, so nimmt sie im Falle $c = 0$ das Maximum und das Minimum auf dem Rand von Ω an.

Eine Konsequenz des Maximumprinzips ist beispielsweise: Ist u eine Lösung von $Lu = 0$ in Ω und wissen wir, dass $u \geq 0$ auf $\partial\Omega$, so folgt auch $u \geq 0$ in Ω.

Im Falle $c \neq 0$ gilt das Maximumprinzip im allgemeinen nicht. Beispiel: $\Omega = (-1,1) \times (-1,1) \subset \mathbb{R}^2$,

$$u(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2) \tag{6.18}$$

erfüllt

$$-\Delta u - 2\pi^2 u = 0$$

in Ω, aber $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Ist aber der Vorfaktor von u nichtnegativ, so ergibt sich das Maximumprinzip in einer etwas schwächeren Form. Wir schreiben

$$u^+ = \max\{u, 0\}\,. \tag{6.19}$$

Satz 6.4 *Es gelte Voraussetzung (6.1) sowie (6.6), (6.7). Sei* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *mit*

$$Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{6.20}$$

Es gelte außerdem $c \geq 0$*. Dann gilt*

$$\max_{y \in \overline{\Omega}} u(y) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u^+(y)\,. \tag{6.21}$$

Gilt statt (6.20)

$$Lu = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{6.22}$$

so folgt

$$\max_{y \in \overline{\Omega}} |u(y)| = \max_{y \in \partial\Omega} |u(y)|\,. \tag{6.23}$$

Beweis: Wir definieren

$$\Omega^+ = \Omega \cap \{x : u(x) > 0\}\,.$$

Ist $u \leq 0$ in Ω, so gilt (6.21) offensichtlich, sei also $\Omega^+ \neq \emptyset$. Es gilt

$$Lu - c(x)u \leq Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega^+.$$

Wir wenden Satz 6.3 an auf $L - c$ und erhalten

$$\max_{y \in \overline{\Omega^+}} u(y) = \max_{y \in \partial\Omega^+} u(y)\,. \tag{6.24}$$

Da $u = 0$ auf $\partial\Omega^+ \cap \Omega$, folgt

$$\max_{y\in\partial\Omega^+} u(y) = \max_{y\in\partial\Omega\cap\partial\Omega^+} u(y) \le \max_{y\in\partial\Omega} u(y)\,.$$

Gilt (6.22), so folgt durch Anwendung auf $-u$ mit $u^- = (-u)^+ = -\min\{u,0\}$

$$\min_{y\in\overline{\Omega}} u(y) \ge -\max_{y\in\partial\Omega} u^-(y)\,, \tag{6.25}$$

und daraus (6.23). □

Satz 6.4 besagt: Hat u ein nichtnegatives Maximum, so wird dieses auch auf dem Rand angenommen. Ist das Maximum negativ, so muss das nicht der Fall sein. Beispiel: $\Omega = (-2,2)\times(-2,2)$,

$$u(x_1,x_2) = -\left(e^{x_1} + e^{-x_1} + e^{x_2} + e^{-x_2}\right)\,. \tag{6.26}$$

Das Maximum liegt in $(0,0)$, $u(0,0) = -4$, aber auf $\partial\Omega$ gilt $u \le -e^2$.

Wir betrachten das Randwertproblem

$$Lu = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{6.27}$$

$$u = g\,, \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{6.28}$$

wobei wir f und g als stetig voraussetzen.

Folgerung 6.5 *Es gelte Voraussetzung (6.1) sowie (6.6), (6.7), sei $c \ge 0$. Seien $u_i \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ Lösungen von (6.27), (6.28) mit $f = f_i$, $g = g_i$, $i = 1,2$. Gilt*

$$f_1 \le f_2 \quad \text{in } \Omega, \quad g_1 \le g_2 \quad \text{in } \partial\Omega, \tag{6.29}$$

so folgt

$$u_1 \le u_2 \quad \text{in } \Omega. \tag{6.30}$$

Beweis: Wir wenden Folgerung 6.4 an auf $u = u_1 - u_2$. □

Hieraus folgt insbesondere die Eindeutigkeit der klassischen Lösung des Randwertproblems (6.27), (6.28) für einen gleichmäßig elliptischen Operator L in einer beliebigen offenen und beschränkten Menge Ω.

Wir behandeln nun das starke Maximumprinzip. Wesentliches Hilfsmittel zu dessen Beweis ist das Lemma von Hopf, welches sich mit der folgenden Situation befasst. Sei x_0 eine strikte Maximalstelle am Rand,

$$x_0 \in \partial\Omega\,, \quad u(x_0) > u(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega, \tag{6.31}$$

der Rand sei nahe x_0 in folgendem Sinne regulär,

$$\text{es gibt ein } R > 0 \text{ und ein } y \in \Omega \text{ mit } B(y;R) \subset \Omega,\ x_0 \in \partial B(y;R). \tag{6.32}$$

Die äußere Normale in x_0 ist dann gegeben (bzw. definiert) durch

$$\nu(x_0) = \frac{x_0 - y}{|x_0 - y|}\,. \tag{6.33}$$

Ist $u \in C^1(\overline{\Omega})$, so folgt aus (6.31) unmittelbar, dass

$$\partial_\nu u(x_0) \ge 0\,.$$

Das Lemma von Hopf besagt nun, dass hier sogar die strikte Ungleichung gelten muss.

Lemma 6.6 (Hopf)
Seien Voraussetzung 6.1 und (6.6) erfüllt, es gelte (6.7) mit $\xi = \nu(x_0)$ *sowie (6.32). Sei* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *mit (6.31) und*

$$Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{6.34}$$

Es liege einer der folgenden drei Fälle vor:

1. $c = 0$,
2. $c \geq 0$, $u(x_0) \geq 0$,
3. $u(x_0) = 0$.

Dann gilt

$$\partial_\nu u(x_0) > 0\,. \tag{6.35}$$

Beweis: Wir definieren

$$v(x) = e^{-\gamma|x-y|^2} - e^{-\gamma R^2}\,. \tag{6.36}$$

Es ist

$$v \geq 0 \quad \text{in } B(y;R), \quad v = 0 \quad \text{auf } \partial B(y;R), \tag{6.37}$$

$$\partial_i v(x) = -2\gamma(x_i - y_i)e^{-\gamma|x-y|^2}\,. \tag{6.38}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}(Lv)(x) = &-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\left[4\gamma^2(x_i-y_i)(x_j-y_j) - 2\gamma\delta_{ij}\right]e^{-\gamma|x-y|^2} \\ &+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x)(-2)\gamma(x_i-y_i)e^{-\gamma|x-y|^2} + c(x)v(x) \\ = &-e^{-\gamma|x-y|^2}\left[4\gamma^2(x-y)^T A(x)(x-y) - 2\gamma\,\mathrm{spur}\,(A(x)) + 2\gamma\,\langle b(x), x-y\rangle - c(x)\right] \\ &- c(x)e^{-\gamma R^2}\,.\end{aligned}$$

Wir betrachten nun eine Kugel $B(x_0;\rho)$ um x_0 und wählen $\rho > 0$ so klein, dass

$$(x-y)^T A(x)(x-y) > 0\,, \quad \text{für alle } x \in K(x_0;\rho), \tag{6.39}$$

das ist möglich wegen (6.33), da $\nu(x_0)^T A(x)\nu(x_0) > 0$. Wir definieren

$$U = B(x_0;\rho) \cap B(y;R) \tag{6.40}$$

und wählen $\gamma > 0$ so groß, dass

$$Lv \leq 0 \quad \text{in } U. \tag{6.41}$$

Wir setzen

$$u_\varepsilon(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)\,, \quad \varepsilon > 0\,. \tag{6.42}$$

Es gilt dann für alle $x \in U$

$$(Lu_\varepsilon)(x) = (Lu)(x) - c(x)u(x_0) + \varepsilon(Lv)(x) \leq -c(x)u(x_0) \leq 0\,. \tag{6.43}$$

Sei nun $c \geq 0$ (Fälle 1 und 2 der Behauptung). Es gilt

$$u_\varepsilon \leq 0 \quad \text{auf } \partial U \cap \partial B(y; R), \text{ da dort } v = 0. \tag{6.44}$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass

$$u_\varepsilon \leq 0 \quad \text{auf } \partial U \cap \partial B(x_0; \rho), \tag{6.45}$$

das ist möglich, da $\partial U \cap \partial B(x_0; \rho)$ kompakt ist und dort $u < u(x_0)$ gilt. (Notfalls muss R etwas verkleinert werden, damit $\partial U \cap \partial B(x_0; \rho)$ ganz in Ω liegt.)

Wir wenden das schwache Maximumprinzip (Satz 6.4) auf u_ε in U an und erhalten

$$u_\varepsilon \leq 0 \quad \text{in } U. \tag{6.46}$$

Da $u_\varepsilon(x_0) = 0$, folgt

$$0 \leq \partial_\nu u_\varepsilon(x_0) = \partial_\nu u(x_0) + \varepsilon \partial_\nu v(x_0)\,.$$

Nun ist

$$\partial_\nu v(x_0) = -2\gamma \left\langle x_0 - y, \nu(x_0) \right\rangle e^{-\gamma |x_0 - y|^2} = -2\gamma R e^{-\gamma R^2} < 0\,,$$

also

$$\partial_\nu u(x_0) \geq -\varepsilon \partial_\nu v(x_0) > 0\,.$$

Schließlich betrachten wir den Fall $u(x_0) = 0$. Es ist dann $u < 0$ in Ω. Wir setzen $d(x) = \min\{c(x), 0\}$, dann ist $d(x) \leq 0$,

$$(L - d)u = Lu - d(x)u \leq Lu \leq 0\,,$$

sowie $c - d = c^+ \geq 0$,

$$(L - d)u = -\text{spur}\,(AD^2 u) + \langle b, \nabla u \rangle + c^+ u\,.$$

Wir können also den bereits bewiesenen Fall anwenden und erhalten die Behauptung. □

Satz 6.7 *Sei Voraussetzung 6.1 erfüllt, sei L gleichmäßig elliptisch, sei Ω außerdem zusammenhängend. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, es gelte*

$$Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{6.47}$$

Sei u nicht konstant. Ist $c = 0$, so kann u kein Maximum in Ω haben. Ist $c \geq 0$, so kann u kein nichtnegatives Maximum in Ω haben.

Beweis: Wir nehmen an, es gebe ein $x \in \Omega$ mit

$$u(x) = \max_{y \in \Omega} u(y) =: M\,. \tag{6.48}$$

Da u nicht konstant ist, ist

$$\Omega^- = \Omega \cap \{u < M\} \neq \emptyset\,.$$

Wir setzen

$$\Omega^M = \Omega \cap \{u = M\} = \Omega \setminus \Omega^-\,.$$

Ω^- ist offen. Ω^M ist nicht offen in Ω, da andernfalls Ω disjunkte Vereinigung zweier offener Mengen und also nicht zusammenhängend wäre. Sei $\tilde{x} \in \Omega^M \cap \partial\Omega^-$, dann gibt es (in der Nähe von $\tilde{x}$) ein $y \in \Omega^-$ mit

$$\mathrm{dist}\,(y, \Omega^M) < \mathrm{dist}\,(y, \partial\Omega)\,.$$

Sei $r > 0$ die größte Zahl mit $B(y,r) \subset \Omega^-$, dann gibt es ein $x_0 \in \partial B(y,r)$ mit $u(x_0) = M$ und also auch $\nabla u(x_0) = 0$. Aus dem Lemma von Hopf, angewandt in $B(y,r)$, folgt aber $\nabla u(x_0) \neq 0$, ein Widerspruch. □

Folgerung 6.8 (Starkes Maximumprinzip, elliptischer Operator)
Unter den Voraussetzungen von Satz 6.7 gilt

$$u(x) < \max_{y\in\partial\Omega} u(y)\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega, \tag{6.49}$$

falls $c = 0$ gilt, oder falls $c \geq 0$ gilt und das Maximum auf der rechten Seite von (6.49) nichtnegativ ist.

Beweis: Folgt aus dem schwachen Maximumprinzip (Satz 6.3) und aus Satz 6.7. □

Wir bemerken, dass Satz 6.7 auch gilt, wenn Ω unbeschränkt ist (die Beschränktheit wurde im Beweis nicht verwendet). Allerdings gilt dann i.a. das schwache Maximumprinzip nicht, so dass eine Abschätzung der Werte von u in Ω gegen die Randwerte nicht möglich ist.

Wir betrachten nun einen Operator der Form

$$\partial_t + L\,,$$

angewendet auf Funktionen "$u = u(x,t)$", mit

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\partial_j\partial_i u + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\partial_i u + c(x,t)u\,, \tag{6.50}$$

Voraussetzung 6.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $T > 0$. Wir setzen*

$$\Omega_T = \Omega \times (0,T]\,, \tag{6.51}$$

und nennen

$$\Sigma = (\partial\Omega \times [0,T]) \cup (\Omega \times \{0\}) \tag{6.52}$$

den parabolischen Rand von Ω_T. Wir nehmen an, dass $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{\Omega_T})$ für alle $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. □

Definition 6.10 (Gleichmäßig parabolischer Operator)
Der Operator $\partial_t + L$ mit L aus (6.50) heißt gleichmäßig parabolisch in Ω_T, wenn es ein $c_a > 0$ gibt mit

$$\xi^T A(x,t)\xi = \sum_{i,j=1}^n \xi_i a_{ij}(x,t)\xi_j \geq c_a|\xi|^2\,, \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ (x,t) \in \Omega_T. \tag{6.53}$$

□

Satz 6.11 (Schwaches Maximumprinzip, parabolischer Operator)
Es gelte Voraussetzung 6.9, sei $\partial_t + L$ gleichmäßig parabolisch in Ω_T. Sei $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$, sei

$$\partial_t u + Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T. \tag{6.54}$$

Im Fall $c = 0$ gilt dann

$$\max_{(x,t)\in\overline{\Omega_T}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\Sigma} u(x,t)\,, \tag{6.55}$$

im Fall $c \geq 0$ gilt

$$\max_{(x,t)\in\overline{\Omega_T}} u(x,t) \leq \max_{(x,t)\in\Sigma} u^+(x,t)\,. \tag{6.56}$$

Beweis: Sei

$$M = \max_{(x,t)\in\overline{\Omega_T}} u(x,t)\,.$$

Wir wenden das schwache Maximumprinzip 6.3 bzw. 6.4 auf $\partial_t + L$ in $\Omega \times (0,T)$ an und erhalten

$$M = \max_{(x,t)\in\partial\Omega_T} u(x,t) \quad \text{bzw.} \quad M \leq \max_{(x,t)\in\partial\Omega_T} u^+(x,t)\,. \tag{6.57}$$

Wir nehmen nun an, es gebe ein $x \in \Omega$ mit

$$u(x,T) = M\,. \tag{6.58}$$

Dann gilt

$$\partial_t u(x,T) \geq 0\,, \quad \nabla_x u(x,T) = 0\,, \quad D_x^2 u(x,T) \leq 0\,,$$

sowie nach Lemma 6.2

$$-\text{spur}\,(A(x,T)D_x^2 u(x,T)) \geq 0\,.$$

Insgesamt ergibt sich, falls $c = 0$, oder falls $c \geq 0$ und $M \geq 0$,

$$\partial_t u(x,T) + Lu(x,T) \geq 0\,. \tag{6.59}$$

Im Spezialfall

$$\partial_t u + Lu < 0 \quad \text{in } \Omega_T, \tag{6.60}$$

von (6.54) kann es also ein $x \in \Omega$ mit $u(x,T) = M$ nicht geben, und es folgen (6.55) bzw. (6.56). Den allgemeinen Fall führen wir auf (6.60) zurück, indem wir setzen

$$u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t\,, \quad \varepsilon > 0\,.$$

Es gilt

$$((\partial_t + L)u_\varepsilon)(x,t) \leq -\varepsilon - \varepsilon t c(x,t) < 0 \quad \text{in } \Omega_t,$$

also folgen (6.55) bzw. (6.56) für u_ε statt u, und für u durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$. □

Satz 6.12 (Starkes Maximumprinzip, parabolischer Operator)
Es gelte Voraussetzung 6.9, sei Ω zusammenhängend, sei $\partial_t + L$ gleichmäßig parabolisch in Ω_T. Sei $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$, sei

$$\partial_t u + Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T. \tag{6.61}$$

Es gebe ein $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ mit

$$u(x_0, t_0) = \max_{(x,t)\in\Omega_T} u(x,t) =: M\,. \tag{6.62}$$

Es liege einer der folgenden drei Fälle vor:

1. $c = 0$,

2. $c \geq 0$, $u(x_0, t_0) \geq 0$,

3. $u(x_0, t_0) = 0$.

Dann ist u konstant in $\overline{\Omega_T}$.

Wir zerlegen den Beweis in mehrere Lemmata.

Lemma 6.13 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 6.12. Sei $B_0 = B((x,t);r)$ eine offene Kugel in Ω_T, es gelte $u < M$ in B_0. Dann gilt auch $u < M$ auf ∂B_0 außer möglicherweise in $(x, t + r)$ und $(x, t - r)$.*

Beweis: In allen anderen Randpunkten (ξ, τ) von B_0 hat die äußere Normale die Form

$$\nu(\xi, \tau) = (\nu_x, \nu_t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad \nu_x \neq 0 .$$

Wir nehmen an, dass $u(\xi, \tau) = M$. Wir wenden das Lemma von Hopf (Lemma 6.6) auf den Operator $\partial_t + L$ in B_0 an. Da L gleichmäßig elliptisch ist, sind in (ξ, τ) die Voraussetzungen von 6.6 erfüllt, also $\partial_\nu u(\xi, \tau) \neq 0$ im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von (ξ, τ). □

Lemma 6.14 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 6.12. Sei $t \in (0, T)$, es gebe ein $\tilde{x} \in \Omega$ mit $u(\tilde{x}, t) < M$. Dann gilt $u(x, t) < M$ für alle $x \in \Omega$.*

Beweis: Wir nehmen an $u(x_1, t) = M$ für ein $x_1 \in \Omega$. Wir können x_1 und einen weiteren Punkt $x_2 \in \Omega$ mit $u(x_2, t) < M$ so wählen, dass $u(x, t) < M$ für alle Punkte x (bis auf x_1) auf der Verbindungsstrecke L von x_1 nach x_2 gilt, und dass $B(L; \delta) \subset \Omega$ für ein $\delta > 0$. Sei

$$x(\varepsilon) = x_1 + \varepsilon(x_2 - x_1), \quad d(\varepsilon) = \operatorname{dist}(x(\varepsilon), \{u = M\}) .$$

Für $\varepsilon < \delta$ wählen wir $r(\varepsilon)$ so, dass $u < M$ in $B_\varepsilon = B((x(\varepsilon), t); r(\varepsilon))$ und u auf ∂B_ε den Wert M annimmt. Nach Lemma 6.13 kann der Wert M nur in den Punkten $(x(\varepsilon), t \pm d(\varepsilon))$ angenommen werden. Für $0 < \varepsilon, \varepsilon' < \delta$ folgt dann (Pythagoras)

$$\begin{aligned} d(\varepsilon')^2 &\leq (\varepsilon - \varepsilon')^2 + d(\varepsilon)^2 \\ d(\varepsilon)^2 &\leq (\varepsilon - \varepsilon')^2 + d(\varepsilon')^2 . \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$|d(\varepsilon')^2 - d(\varepsilon)^2| \leq (\varepsilon' - \varepsilon)^2 ,$$

also

$$\frac{|d(\varepsilon') - d(\varepsilon)|}{\varepsilon' - \varepsilon} \leq \frac{(\varepsilon' - \varepsilon)}{d(\varepsilon') + d(\varepsilon)} .$$

Grenzübergang $\varepsilon' \to \varepsilon$ liefert $d'(\varepsilon) = 0$ für alle $\varepsilon \in (0, \delta)$, aber andererseits gilt $d > 0$ und $d(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$, ein Widerspruch. □

Lemma 6.15 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 6.12. Sei $0 \leq t_0 < t_1 \leq T$, es gelte $u < M$ in $\Omega \times (t_0, t_1)$. Dann gilt $u < M$ in $\Omega \times \{t_1\}$.*

Beweis: Wir nehmen an, $u(x_1, t_1) = M$ für ein $x_1 \in \Omega$. Wir definieren

$$v(x,t) = e^{-|x-x_1|^2 - \alpha(t-t_1)} - 1\,. \tag{6.63}$$

Es gilt

$$(\partial_t + L)(v) = e^{-|x-x_1|^2-\alpha(t-t_1)}[-\alpha + 4(x-x_1)^T A(x)(x-x_1) \tag{6.64}$$
$$- 2\mathrm{spur}\,(A(x)) - 2\,\langle b(x), x-x_1\rangle + c(x)] - c(x)\,. \tag{6.65}$$

Wir wählen $\alpha > 0$ so groß, dass

$$(\partial_t + L)v < 0 \quad \text{in } V = B((x_1,t_1);\rho) \cap \{t \le t_1\} \tag{6.66}$$

für hinreichend kleines $\rho > 0$. Wir betrachten das Paraboloid

$$P = \{(x,t) : |x-x_1|^2 \le \alpha(t_1 - t)\}\,. \tag{6.67}$$

Wir definieren

$$u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - M + \varepsilon v(x,t) \tag{6.68}$$

und

$$U = V \cap P\,.$$

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt $u_\varepsilon \le 0$ auf ∂U, da $v = 0$ auf ∂P und $u < M$ auf $\partial U \setminus \partial P$. Im Falle $c \ge 0$ (Fälle 1 und 2 der Behauptung) folgt aus dem schwachen Maximumprinzip (Satz 6.4), dass

$$u_\varepsilon \le 0 \quad \text{in } U, \tag{6.69}$$

und weiter, da $u_\varepsilon(x_1,t_1) = 0$,

$$0 \le \partial_t u_\varepsilon(x_1,t_1) = \partial_t u(x_1,t_1) + \varepsilon \partial_t v(x_1,t_1) = \partial_t u(x_1,t_1) - \varepsilon\alpha\,, \tag{6.70}$$

also

$$0 < \partial_t u(x_1,t_1)\,. \tag{6.71}$$

Andererseits gilt im Punkt (x_1,t_1) auch

$$0 \ge (\partial_t + L)u = \partial_t u - \mathrm{spur}\,(AD^2u) + \langle b, \nabla u\rangle + cu \ge \partial_t u + cu \ge \partial_t u\,,$$

ein Widerspruch zu (6.71). Der Fall 3 wird auf diesen Fall zurückgeführt, und zwar auf analoge Weise wie im Beweis von Lemma 6.6. □

Beweis von Satz 6.12. Wegen Lemma 6.14 gilt für jedes $t > 0$ entweder

$$u(x,t) < M\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

oder

$$u(x,t) = M\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Die Menge

$$I = \{t : t \in (0,T),\ u(x,t) < M\}$$

ist offen, sie läßt sich daher darstellen als disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen offenen Intervallen $I_k = (a_k, b_k)$. Da nach Lemma 6.15 der Fall $b_k < T$ (mit $u(x,b_k) = M$)

nicht auftreten kann, muss $I = (0, T)$ gelten, und wegen Lemma 6.15 folgt auch $u(x, T) < M$. □

Aus dem Maximumprinzip folgt die Eindeutigkeit einer klassischen Lösung der parabolischen Anfangsrandwertaufgabe

$$\partial_t u + Lu = f \quad \text{in } \Omega_T, \tag{6.72}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \tag{6.73}$$

$$u(x, t) = g(x, t) \quad \text{für } x \in \partial\Omega,\ t \in (0, T), \tag{6.74}$$

indem man das Maximumprinzip auf die Differenzen $u_1 - u_2$ und $u_2 - u_1$ zweier Lösungen von (6.72) – (6.74) anwendet.