

4 Monotone Probleme

Wir betrachten das elliptische Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(\nabla u)) &= f, & \text{in } \Omega, \\ u(x) &= 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Hierbei ist $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine gegebene Funktion. Ist a linear, so handelt es sich um ein lineares elliptisches Problem, wie wir es in Teil I betrachtet haben, im Fall der Identität $a(y) = y$ ergibt sich $-\Delta u = f$. Ist a nichtlinear, so handelt es sich um ein **quasilineares** Problem; Ausdifferenzieren von $\operatorname{div}(a(\nabla u(x)))$ nach x ergibt einen Ausdruck, der hinsichtlich der höchsten (in diesem Falle zweiten) Ableitung linear, aber hinsichtlich der niedrigeren Ableitungen nichtlinear ist.

Die variationelle Formulierung von (4.1) lautet

$$\int_{\Omega} \langle a(\nabla u(x)), \nabla v(x) \rangle dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx, \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega), \tag{4.2}$$

sie ergibt sich wie im linearen Fall durch Testen mit v und partielle Integration mit dem Satz von Gauß.

Wir können (4.2) in eine Operatorgleichung

$$Au = F \tag{4.3}$$

umschreiben. Hier ist $A : V \rightarrow V^*$ mit $V = H_0^1(\Omega)$ und $V^* = H^{-1}(\Omega)$,

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} \langle a(\nabla u(x)), \nabla v(x) \rangle dx, \tag{4.4}$$

und $F \in V^*$ wie gehabt mit

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

Für nichtlineares a ist der Operator A nichtlinear, bei (4.3) handelt sich also um eine nichtlineare Operatorgleichung.

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Situation, in der a die Bedingung

$$\langle a(y) - a(z), y - z \rangle \geq 0, \quad \text{für alle } y, z \in \mathbb{R}^n, \tag{4.5}$$

erfüllt. Falls a linear ist, bedeutet (4.5), dass die zugehörige Matrix $M \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ positiv semidefinit ist. Dieser Fall tritt beispielweise dann auf, wenn a die Ableitung einer konvexen quadratischen Funktion $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist, dann ist $M = D^2J$ (Hessematrix).

Definition 4.1 (Monotoner Operator)

Sei V normierter Raum. Ein Operator $A : V \rightarrow V^*$ heißt *monoton*, falls

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0, \quad \text{für alle } u, v \in V, \tag{4.6}$$

und *streng monoton*, falls für alle $u \neq v$ in (4.6) die strikte Ungleichung gilt.

Definition 4.2 Sei V normierter Raum. Ein Operator $A : V \rightarrow V^*$ heißt koerziv, falls

$$\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|} = +\infty. \quad (4.7)$$

Wir betrachten die Gleichung $Au = F$ zunächst im Endlichdimensionalen.

Satz 4.3 (Fixpunktsatz von Brouwer)

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex, $f : K \rightarrow K$ stetig, $K \neq \emptyset$. Dann hat f einen Fixpunkt $u \in K$.

Beweis: Nicht hier. Das ist ein grundlegender Satz aus der nichtlinearen Funktionalanalysis. \square

Folgerung 4.4 Sei $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, es gebe ein $R > 0$ mit

$$\langle Av, v \rangle \geq 0, \quad \text{für alle } v \text{ mit } |v| = R. \quad (4.8)$$

Dann hat A eine Nullstelle u mit $|u| \leq R$.

Beweis: Wir nehmen an, es gebe keine solche Nullstelle. Dann wird durch

$$f(v) = -R \frac{Av}{|Av|}$$

eine stetige Abbildung $f : B_R \rightarrow B_R$ definiert ($B_R =$ abgeschlossene Kugel um 0 mit Radius R). Gemäß Fixpunktsatz von Brouwer gibt es ein $u \in B_R$ mit $f(u) = u$. Nach Definition von f ist $|u| = |f(u)| = R$. Wegen (4.8) folgt

$$0 \leq \langle Au, u \rangle = \langle Au, f(u) \rangle = -R|Au|,$$

also $Au = 0$. Widerspruch. \square

Satz 4.5 Sei $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und koerziv. Dann hat die Gleichung $Au = F$ eine Lösung $u \in \mathbb{R}^n$ für jedes $F \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Sei zunächst $F = 0$. Wir wenden Korollar 4.4 an. Da A koerziv ist, gibt es $R > 0$, so dass (4.8) gilt. Also hat $Au = 0$ eine Lösung $u \in \mathbb{R}^n$. Für beliebiges $F \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir $A_F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A_F v = Av - F$. A_F ist stetig und auch koerziv: Es ist

$$\langle A_F v, v \rangle = \langle Av, v \rangle - \langle F, v \rangle \geq \langle Av, v \rangle - \|F\| \|v\|,$$

also

$$\frac{\langle A_F v, v \rangle}{\|v\|} \geq \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|} - \|F\|,$$

und die Koerzivität von A_F folgt aus der Koerzivität von A . \square

Wir besprechen nun den unendlichdimensionalen Fall. Dieser wird durch Approximation auf den endlichdimensionalen Fall zurückgeführt. Für die Anwendung auf partielle Differentialgleichungen möchte man außerdem die Stetigkeitsanforderungen an A möglichst gering halten.

Definition 4.6 (Hemistetig) Sei V normierter Raum. Ein Operator $A : V \rightarrow V^*$ heißt hemistetig, wenn für alle $u, v, w \in V$ die Abbildung

$$t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle \quad (4.9)$$

stetig ist auf $[0, 1]$.

Lemma 4.7 Sei V Banachraum, $A : V \rightarrow V^*$. Dann ist A monoton genau dann, wenn für alle $u, v \in V$ die Abbildung

$$t \mapsto \langle A(u + tv), v \rangle \quad (4.10)$$

monoton wachsend ist auf $[0, 1]$.

Beweis: Übung.

Satz 4.8 Sei V Banachraum, $A : V \rightarrow V^*$ monoton. Dann ist A lokal beschränkt, d.h. zu jedem $u \in V$ gibt es eine Umgebung U , so daß $A(U)$ beschränkt ist in V^* .

Beweis: Ist A nicht lokal beschränkt, so gibt es ein $u \in V$ und eine Folge (u_n) in V mit

$$u_n \rightarrow u, \quad \|Au_n\| \rightarrow \infty. \quad (4.11)$$

Wir definieren

$$c_n = 1 + \|Au_n\| \|u_n - u\|. \quad (4.12)$$

Wir wollen zeigen, daß die Folge $c_n^{-1}Au_n$ beschränkt ist. Sei dazu $v \in V$ beliebig gewählt. Es gilt

$$0 \leq \langle A(u + v) - A(u_n), u + v - u_n \rangle, \quad (4.13)$$

also

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_n} \langle A(u_n), v \rangle &\leq \frac{1}{c_n} (\langle A(u_n), u_n - u \rangle + \langle A(u + v), u + v - u_n \rangle) \\ &\leq 1 + \frac{1}{c_n} \|A(u + v)\| \|u + v - u_n\| \leq M \end{aligned} \quad (4.14)$$

mit einer von n unabhängigen Konstante M . Führen wir dasselbe Argument mit $-v$ an der Stelle von v aus, so erhalten wir

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{c_n} \langle Au_n, v \rangle \right| \leq M(v) < \infty. \quad (4.15)$$

Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz von Banach-Steinhaus, siehe Funktionalanalysis) folgt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{c_n} \|Au_n\| =: C < \infty, \quad (4.16)$$

also

$$\|Au_n\| \leq Cc_n = C(1 + \|Au_n\| \|u - u_n\|), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.17)$$

also

$$(1 - C\|u - u_n\|)\|Au_n\| \leq C, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.18)$$

also $\|Au_n\| \leq 2C$, falls $\|u - u_n\| \leq 1/2C$, was ein Widerspruch zu (4.11) ist. \square

Folgerung 4.9 Sei V Banachraum, $A : V \rightarrow V^*$ monoton, (u_n) eine normkonvergente Folge. Dann ist die Folge (Au_n) beschränkt in V^* .

Beweis: Folgt direkt aus Satz 4.8. □

Folgerung 4.10 Sei V Banachraum, $A : V \rightarrow V^*$ monoton, $K \subset V$ beschränkt, es gebe ein $C > 0$ mit

$$\langle Au, u \rangle \leq C, \quad \text{für alle } u \in K. \quad (4.19)$$

Dann ist $A(K)$ beschränkt in V^* .

Beweis: Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt nach Satz 4.8

$$\sup_{\|v\| \leq \varepsilon} \|Av\| =: c < \infty. \quad (4.20)$$

Für beliebiges $u \in K$ gilt dann wegen $0 \leq \langle Au - Av, u - v \rangle$

$$\begin{aligned} \|Au\| &= \sup_{\|v\| \leq 1} \langle Au, v \rangle = \sup_{\|v\| \leq \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \langle Au, v \rangle \\ &\leq \sup_{\|v\| \leq \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} (\langle Au, u \rangle + \langle Av, v \rangle - \langle Av, u \rangle) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} (C + c\varepsilon + cC_K), \quad C_K := \sup_{u \in K} \|u\|. \end{aligned} \quad (4.21)$$

□

Satz 4.11 Sei V reflexiver Banachraum, $A : V \rightarrow V^*$ monoton. Dann sind äquivalent:

(i) A ist hemistetig.

(ii) Für alle $u \in V$ und $b \in V^*$ gilt: Aus

$$\langle b - Av, u - v \rangle \geq 0, \quad \text{für alle } v \in V \quad (4.22)$$

folgt $Au = b$.

(iii) Für alle $u \in V$ und $b \in V^*$ gilt: Ist (u_n) Folge in V mit

$$u_n \rightharpoonup u, \quad Au_n \rightharpoonup b, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n \rangle \leq \langle b, u \rangle, \quad (4.23)$$

so folgt $Au = b$.

(iv) A ist demistetig, d.h. für alle $u \in V$ gilt: Ist (u_n) Folge in V mit $u_n \rightarrow u$, so folgt $Au_n \rightarrow Au$.

Beweis: “(i) \Rightarrow (ii)”: Seien $u \in V$, $b \in V^*$ so, daß (4.22) gilt. Mit $v = u - tw$ folgt dann

$$\langle b - A(u - tw), tw \rangle \geq 0, \quad \forall w \in V, t > 0, \quad (4.24)$$

also

$$\langle b - A(u - tw), w \rangle \geq 0, \quad \forall w \in V, t > 0. \quad (4.25)$$

Grenzübergang $t \downarrow 0$ ergibt wegen der Hemistetigkeit von A

$$\langle b - A(u), w \rangle \geq 0, \quad \forall w \in V. \quad (4.26)$$

Da w beliebig war, folgt $Au = b$.

“(ii) \Rightarrow (iii)”: Sei (u_n) Folge, für die (4.23) gilt, sei $v \in V$ beliebig. Es ist dann

$$0 \leq \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle = \langle Au_n, u_n \rangle - \langle Au_n, v \rangle - \langle Av, u_n - v \rangle, \quad (4.27)$$

also

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\langle Au_n, u_n \rangle - \langle Au_n, v \rangle - \langle Av, u_n - v \rangle) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, v \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Av, u_n - v \rangle \\ &\leq \langle b, u \rangle - \langle b, v \rangle - \langle Av, u - v \rangle \\ &= \langle b - Av, u - v \rangle. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Da v beliebig war, folgt $b = Au$ nach Voraussetzung (ii).

“(iii) \Rightarrow (iv)”: Sei (u_n) Folge in V mit $u_n \rightarrow u$. Nach Folgerung 4.9 ist (Au_n) beschränkt in V^* . Sei (u_{n_k}) eine Teilfolge, so daß (Au_{n_k}) schwach in V^* konvergiert, eine solche existiert da beschränkte Mengen im reflexiven Raum schwach kompakt sind. Es gelte $Au_{n_k} \rightharpoonup b$. Da $\{u_{n_k}\}$ in der Norm konvergiert, folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} \rangle = \langle b, u \rangle, \quad (4.29)$$

also $b = Au$ nach Voraussetzung (iii). Da der Limes für jede solche konvergente Teilfolge derselbe ist, folgt $Au_n \rightarrow Au$ für die ganze Folge.

“(iv) \Rightarrow (i)”: Seien $u, v, w \in V$, $t_n \rightarrow t$ in $[0, 1]$. Dann gilt $u + t_n v \rightarrow u + tv$ in V , also $A(u + t_n v) \rightharpoonup A(u + tv)$ in V^* nach Voraussetzung (iv), also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle A(u + t_n v), w \rangle = \langle A(u + tv), w \rangle. \quad (4.30)$$

Damit ist A hemistetig. □