

## Semestralklausur Analysis 3 für Physiker

**Bearbeitungszeit: 90 min**      **Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt!**

### Aufgabe 1

Ermitteln Sie alle Lösungen

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad t \mapsto u(t) := (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$$

des linearen Systems

$$u_1'(t) = u_1(t) + 5u_2(t) \tag{1}$$

$$u_2'(t) = 5u_1(t) + u_2(t) \tag{2}$$

$$u_3'(t) = 2u_3(t) - \sqrt{2} u_4(t) \tag{3}$$

$$u_4'(t) = -\sqrt{2} u_3(t) + 3u_4(t) \tag{4}$$

Hierbei rangiert die Variable  $t$  auf der ganzen reellen Achse.

### Aufgabe 2

Bestimmen Sie auf der reellen Achse die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = e^x$$

Begründen Sie ausführlich Ihre Argumentation.

### Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, dass die folgenden Funktionen holomorph in ganz  $\mathbb{C}$  sind:

$$f_1(z) = e^{-z^2} \qquad f_2(z) = \sin^2 z \qquad f_3(z) = z + z^3$$

#### Aufgabe 4

Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_C z^6 dz$$

entlang des Weges  $C = C_1 = \{ z(t) = t^3 \mid t \in [0, 1] \}$  bzw. entlang des Weges  $C = C_2 = \{ z(t) = \cos t + i \sin t \mid t = \pi \dots 0 \}$ .

#### Aufgabe 5

Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{C_j} \frac{dz}{z^6 - 9z^4 - z^2 + 9} \quad j = 1, 2, 3$$

$$\int_{C_j} \frac{(z+5)}{z(z-1)^2} dz \quad j = 1, 2, 3$$

wobei  $C_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) die mathematisch positiv durchlaufenen Kurven

$$C_1 := \left\{ \frac{1}{2} e^{it} \mid t \in [0, 2\pi] \right\}$$

$$C_2 := \left\{ \frac{3}{2} e^{it} \mid t \in [0, 2\pi] \right\}$$

$$C_3 := \left\{ 3 + \frac{5}{2} e^{it} \mid t \in [0, 2\pi] \right\}$$

bezeichnen. Begründen Sie bitte ausführlich die einzelnen Schritte.

#### Aufgabe 6

Es sind alle nichttrivialen Lösungen der folgenden Differentialgleichung zu bestimmen:

$$(xy^2(x) - y^3(x)) + (1 - xy^2(x)) y'(x) = 0$$

**Es können maximal 10 Punkte pro Aufgabe erreicht werden.**

**Halten Sie bitte Ihren Lichtbildausweis und  
Ihren Studentenausweis zur Kontrolle bereit!**