

10. Einige gewöhnliche Differentialgleichungen

Im letzten Kapitel haben wir den Begriff der Selbstadjungiertheit bei tridiagonalen Operatoren kennengelernt. In der Tat können solchen Operatoren in vielen Fällen als Darstellungen bestimmter partieller Differentialgleichungen betrachtet werden, z. B. als Darstellungen der stationären Schrödinger-Gleichung mit einem bestimmten Potential.

Dieses Kapitel soll lediglich der Wiederholung verschiedener Darstellungen von Lösungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen maximal zweiter Ordnung dienen und verfolgt somit die Vertiefung einer allgemeinen Methode, die für die Analysis historisch eine große Bedeutung hat. Auch im Rahmen der Sturm-Liouville-Theorie für supersymmetrische Schrödinger-Operatoren spielen ähnliche Lösungsdarstellungen eine Rolle, so dass ein intensives Studium dieser Strukturen auch für die Quantenmechanik selbst von besonderer Wichtigkeit ist.

Lemma 10.1

Es seien f, g stetige Funktionen auf einem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Weiterhin sei $\alpha \in (a, b)$. Die Differentialgleichung

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x) \quad x \in (a, b) \quad (416)$$

wird durch die folgende Funktion $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$ gelöst:

$$y(x) := e^{-F(x)} \int_{\alpha}^x g(t)e^{F(t)} dt, \quad (417)$$

Hierbei wird die Funktion $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x)$ gegeben durch

$$F(x) := \int_{\alpha}^x f(t) dt \quad (418)$$

Lemma 10.2

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \quad x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \quad (419)$$

mit stetigen Funktionen $p, q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Es sei die zweimal differenzierbare Funktion $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ bereits eine Lösung der Differentialgleichung (419) und u habe keine Nullstellen. Die Funktion $v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$v(x) := u(x) \int_{\alpha}^x \frac{e^{-P(t)}}{u^2(t)} dt \quad \alpha \in (a, b) \quad (420)$$

liefert dann eine zweite nichtverschwindende, von u linear unabhängige Lösung der Gleichung (419), wobei

$$P(x) := \int_{\alpha}^x p(t) dt \quad \alpha \in (a, b) \quad (421)$$

Beweis

Der Beweis von Lemma 10.1 geschieht durch direktes Nachrechnen. Wir führen im Fall von Lemma 10.2 die einzelnen Schritte jetzt explizit vor:

Wir definieren die Funktion

$$F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) := \int_{\alpha}^x \frac{e^{-P(t)}}{u^2(t)} dt \quad (422)$$

für einen festen Wert $\alpha \in (a, b)$, wobei die Funktion P wie in der Aufgabenstellung gegeben wird durch

$$P : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto P(x) := \int_{\alpha}^x p(t) dt \quad (423)$$

Demnach gilt $v(x) = u(x)F(x)$ und wir erhalten

$$v'(x) = u'(x)F(x) + \frac{e^{-P(x)}}{u(x)} \quad (424)$$

Beachte hierbei, dass u nullstellenfreie Funktion ist. Hieraus folgt

$$v''(x) = u''(x)F(x) + u'(x) \frac{e^{-P(x)}}{u^2(x)} + \frac{-p(x)e^{-P(x)}u(x) - e^{-P(x)}u'(x)}{u^2(x)} \quad (425)$$

und somit

$$v''(x) = u''(x)F(x) - \frac{p(x)e^{-P(x)}}{u(x)} \quad (426)$$

Dies liefert

$$v''(x) + p(x)v'(x) = (u''(x) + p(x)u'(x))F(x) \quad (427)$$

und daher

$$v''(x) + p(x)v'(x) + q(x)v(x) = (u''(x) + p(x)u'(x))F(x) + q(x)u(x)F(x) = \quad (428)$$

$$(u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x))F(x) = 0 \quad (429)$$

also auch

$$v''(x) + p(x)v'(x) + q(x)v(x) = 0, \quad (430)$$

d.h. die Funktion v liefert eine zweite Lösung der Differentialgleichung (419).

Falls es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $v = \lambda u$, so gilt wegen der Nullstellenfreiheit von u auch

$$\lambda = \frac{v(x)}{u(x)} \Rightarrow 0 = \frac{d}{dx} \left(\frac{v(x)}{u(x)} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{u(x)F(x)}{u(x)} \right) = F'(x) = \frac{e^{-P(x)}}{u^2(x)} \quad (431)$$

Dies ist ein Widerspruch, denn es würde dann $e^{-P(x)} = 0$ für alle $x \in (a, b)$ folgen.

Lemma 10.3

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \quad (432)$$

mit stetigen Funktionen $p, q, f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Es seien $u, v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Lösungen der Gleichung (432) im Fall $f = 0$. Falls die Funktion

$$w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto w(x) := u(x)v'(x) - u'(x)v(x) \quad (433)$$

nullstellenfrei in (a, b) ist, so ist für ein beliebiges stetiges $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$y(x) := -u(x) \int_{\alpha}^x \frac{v(t)g(t)}{w(t)} dt + v(x) \int_{\alpha}^x \frac{u(t)g(t)}{w(t)} dt \quad (434)$$

eine Lösung der Gleichung

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) \quad x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \quad (435)$$

Beweis

Nach den Voraussetzung der Aufgabenstellung setzen wir

$$y(x) := -u(x)V(x) + v(x)U(x) \quad (436)$$

mit

$$U(x) := \int_{\alpha}^x \frac{u(t)g(t)}{w(t)} dt \quad V(x) := \int_{\alpha}^x \frac{v(t)g(t)}{w(t)} dt \quad (437)$$

Damit erreichen wir

$$y'(x) = -u'(x)V(x) - u(x)\frac{v(x)g(x)}{w(x)} + v'(x)U(x) + v(x)\frac{u(x)g(x)}{w(x)} \Leftrightarrow \quad (438)$$

$$y'(x) = -u'(x)V(x) + v'(x)U(x) \quad (439)$$

$$y''(x) = -u''(x)V(x) - u'(x)\frac{v(x)g(x)}{w(x)} + v''(x)U(x) + v'(x)\frac{u(x)g(x)}{w(x)} \quad (440)$$

wobei wir

$$w(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x) \quad (441)$$

benutzt haben. Damit bekommen wir

$$y''(x) = -u''(x)V(x) + \frac{g(x)}{w(x)}w(x) + v''(x)U(x) \Leftrightarrow \quad (442)$$

$$y''(x) = -u''(x)V(x) + g(x) + v''(x)U(x), \quad (443)$$

und somit

$$y''(x) + py'(x) = -(u''(x) + p(x)u'(x))V(x) + g(x) + (v''(x) + p(x)v'(x))U(x) \quad (444)$$

Addieren wir hierzu

$$q(x)y(x) = -q(x)u(x)V(x) + q(x)v(x)U(x), \quad (445)$$

so erhalten wir insgesamt wegen

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = v''(x) + p(x)v'(x) + q(x)v(x) = 0 \quad (446)$$

die Differentialgleichung

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x), \quad (447)$$

d.h. der in der Aufgabenstellung gegebene Ansatz

$$y(x) := -u(x) \int_{\alpha}^x \frac{v(t) g(t)}{w(t)} dt + v(x) \int_{\alpha}^x \frac{u(t) g(t)}{w(t)} dt \quad (448)$$

erbringt tatsächlich eine Lösung der Gleichung

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) \quad x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \quad (449)$$

Beispiel 10.4

Gegeben sei als Anwendungsbeispiel für Lemma 10.2 die homogene Differentialgleichung

$$y''(x) - \frac{2x}{1-x^2} y'(x) + \frac{2}{1-x^2} y(x) = 0 \quad x \in (0, 1) \quad (450)$$

Eine erste Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - \frac{2x}{1-x^2} y'(x) + \frac{2}{1-x^2} y(x) = 0 \quad x \in (0, 1) \quad (451)$$

kann sofort gesichtet werden: $y(x) = x$ liefert $y''(x) = 0$ und damit ist klar, dass $y(x) = x$ eine Lösung von (450) ist. Im Sinne des in Lemma 10.2 vorgestellten allgemeinen Verfahrens erhalten wir für die Funktion P :

$$P(x) = \int_{\alpha}^x p(t) dt = \int_{\beta}^x \frac{-2t}{1-t^2} dt, \quad (452)$$

wobei $\alpha \in (0, 1)$. Das jetzt zu berechnende Integral

$$F(x) := \int_{\alpha}^x \frac{e^{-P(t)}}{u^2(t)} dt, \quad (453)$$

wird zu

$$F(x) = \int_{\alpha}^x \frac{e^{-\ln(1-t^2)+\ln(1-\alpha^2)}}{t^2} dt \quad (454)$$

Dies kann man schreiben als

$$F(x) = (1-\alpha^2) \int_{\alpha}^x \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = (1-\alpha^2) \int_{\alpha}^x \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2} \right) dt \quad (455)$$

Auswerten des Integrals führt zu

$$F(x) = (1 - \alpha^2) \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}\right) \Big|_{\alpha}^x \quad (456)$$

Dies kann zunächst geschrieben werden als

$$F(x) = (1 - \alpha^2) \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{x}\right) + c, \quad (457)$$

wobei die Konstante c gegeben wird durch

$$c := -(1 - \alpha^2) \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right) \quad (458)$$

Nach dem Konstruktionsprinzip für eine zweite nichtverschwindende Lösung erhalten wir jetzt eine solche Lösung durch

$$v(x) := u(x) F(x) = (1 - \alpha^2) \left(\frac{1}{2} x \ln \frac{1+x}{1-x} - 1\right) + cx \quad (459)$$

und die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung (432) ($f = 0$) durch

$$y(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (460)$$

Einsetzen von $u(x) = x$ und des Ausdrucks (459) für $v(x)$ in (460) erbringt damit, dass die allgemeine Lösung y für (450) geschrieben werden kann als

$$y(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 \left(\frac{1}{2} x \ln \frac{1+x}{1-x} - 1\right) \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad (461)$$

Beispiel 10.5

Wir betrachten auf dem Intervall $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ die Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) - \frac{4}{x^2} y(x) = 0 \quad (462)$$

Eine Lösung der Differentialgleichung wird offensichtlich gegeben durch $u : (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x) := x^2$. Wir erhalten damit nach der Wahl $\alpha := 1$ die Funktion P durch

$$P(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad (463)$$

und somit erhalten wir für die Funktion F :

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^{-\ln t}}{t^4} dt \quad (464)$$

Dies liefert eine von u linear unabhängige Lösung $w : (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto w(x) := \frac{1}{x^2}$.

Im folgenden Teil dieses Kapitels beschäftigen wir uns vornehmlich mit Auflösungsverfahren nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Theorem 10.6 Bernoulli-Gleichung

Es seien $p, q : J = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a < b$ stetige Funktionen und es sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Gegeben sei die nichtlineare Bernoullische Differentialgleichung

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)(y(x))^\lambda \quad x \in J \quad (465)$$

Es seien $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ und $u : J \rightarrow \mathbb{R}$ für $x \in J$ gegeben durch

$$F(x) := \int_\alpha^x (\lambda - 1) p(t) dt \quad u(x) := e^{-F(x)} \int_\alpha^x (1 - \lambda) q(t) e^{F(t)} dt \quad (466)$$

zu einem fest vorgegebenen $\alpha \in J$. Falls u eine positive Funktion auf J ist, d.h. falls

$$\forall x \in J : u(x) > 0, \quad (467)$$

dann ist die Funktion

$$y : J \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto y(x) := (u(x))^{\frac{1}{1-\lambda}} \quad (468)$$

eine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung (465).

Beweis

Falls eine positive Lösung $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, für die die Bernoulli-Gleichung

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)(y(x))^\lambda \quad x \in J \quad (469)$$

gilt, so können wir die Gleichung mit $(y(x))^{-\lambda}$ multiplizieren und erhalten

$$y'(x)(y(x))^{-\lambda} = p(x)y(x)^{1-\lambda} + q(x) \quad x \in J \quad (470)$$

Vereinbaren wir die Funktion $u : J \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$u(x) := (y(x))^{1-\lambda}, \quad (471)$$

so ist die letzte Gleichung äquivalent zu

$$\frac{1}{1-\lambda} u'(x) = p(x)u(x) + q(x) \quad x \in J \quad \Leftrightarrow \quad (472)$$

$$u'(x) + (\lambda - 1)p(x)u(x) = (1 - \lambda)q(x) \quad x \in J \quad (473)$$

Es sei jetzt $u : J \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Gleichung (473), wie sie mit dem in Lemma 10.1 angegebenen Standardverfahren konstruiert werden kann. Falls $u(x) > 0$ auf J gilt, so ist die Funktion

$$y : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y(x) := (u(x))^{\frac{1}{1-\lambda}} \quad (474)$$

immer eine positive Funktion, die die Gleichung (469) erfüllt.

Definition 10.7

Eine Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ heisst homogen vom Grade $n \in \mathbb{N}_0$, sofern

1. $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (x, y) \in U \Rightarrow (tx, ty) \in U$
2. $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall (x, y) \in U : f(tx, ty) = t^n f(x, y)$

Beispiel 10.8

1. Es sei $f : U = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := x^3 - xy^2$. Dann ist f eine homogene Funktion vom Grade 3.
2. Es sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus (\{(0, s) \mid s \in \mathbb{R}\} \cup \{(s, 0) \mid s \in \mathbb{R}\})$. Die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x, y) = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$ ist homogen vom Grade 0.

Definition 10.9

Es sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ homogen vom Grade 0. Dann heisst die Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ Differentialgleichung vom homogenen Typ.

Theorem 10.10 Differentialgleichung vom homogenen Typ

Es sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ homogen vom Grade 0 und es gelte $U \cap \{(0, s) \mid s \in \mathbb{R}\} = \{ \}$. Weiterhin sei $\{(1, s) \mid s \in \mathbb{R}\} \cap U \neq \{ \}$ und es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge, für die gelte

$$J \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} : (x, y) \in U\} \quad (475)$$

Falls eine differenzierbare Funktion $u : J \rightarrow \mathbb{R}$, existiert, die die Differentialgleichung

$$\forall x \in J : u'(x) = \frac{1}{x} (f(1, u(x)) - u(x)) \quad (476)$$

erfüllt, dann ist die Funktion

$$y : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y(x) := xu(x) \quad (477)$$

eine Lösung der homogenen Gleichung

$$\forall x \in J : y'(x) = f(x, y(x)) \quad (478)$$

Beweis

Wir nehmen an, es gebe ein $J \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} : (x, y) \in U\}$ und eine differenzierbare Funktion $u : J \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\forall x \in J : u'(x) = \frac{1}{x} (f(1, u(x)) - u(x)) \quad (479)$$

Dann folgt

$$\forall x \in J : xu'(x) = f(1, u(x)) - u(x) \quad (480)$$

Wegen der Homogenität von f vom Grade 0 ist dies äquivalent zu

$$\forall x \in J : xu'(x) = f(x, xu(x)) - u(x), \quad (481)$$

und dies ist gleichbedeutend mit

$$\forall x \in J : (xu)'(x) = f(x, xu(x)) \quad (482)$$

Definiert man jetzt die Funktion $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$x \mapsto y(x) := xu(x), \quad (483)$$

so schreibt sich die letzte Beziehung als

$$\forall x \in J : y'(x) = f(x, y(x)) \quad (484)$$

d.h. y erfüllt auf J unter den genannten Bedingungen die Differentialgleichung vom homogenen Typ.

Beispiel 10.11

Es sei die folgende Differentialgleichung gegeben

$$y'(x) = f(x, y(x)) = \frac{2\sqrt{xy(x)} - y(x)}{x} \quad (485)$$

Wählt man $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$, so erkennt man, dass $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ homogen vom Grade 0 ist. Wenden wir den Inhalt von Theorem 10.10 an, so bietet es sich an, die Differentialgleichung

$$u'(x) = \frac{1}{x} (f(1, u(x)) - u(x)) = \frac{1}{x} (2\sqrt{u(x)} - 2u(x)) \quad (486)$$

zu betrachten. Vereinbart man $u : J = \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$u(x) := \left(1 + \frac{c}{x}\right)^2 \quad c > 0, \quad (487)$$

so erkennt man, dass diese Funktion die Differentialgleichung (486) erfüllt. Vereinbart man jetzt die Funktion

$$y : J = \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y(x) := xu(x) = x \left(1 + \frac{c}{x}\right)^2 \quad (488)$$

so rechnet man relativ leicht nach, dass damit die Funktion y der ursprünglichen Differentialgleichung genügt:

$$y'(x) = f(x, y(x)) = \frac{2\sqrt{xy(x)} - y(x)}{x} \quad (489)$$

Wir zitieren im folgenden zwei Lemmata, die beide aus der mehrdimensionalen Analysis folgen. Das erste Lemma ist eine Konsequenz der Kettenregel, das zweite Lemma eine Konsequenz des Satzes von Schwarz über die Vertauschung partieller Ableitungen.

Lemma 10.12

Es sei f stetig differenzierbare Funktion $f : R := [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d$. Für ein festes $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$\Omega(\alpha) := \{(x, y) \in R \mid f(x, y) = \alpha\} \tag{490}$$

$$D(\alpha) := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \Omega(\alpha)\} \tag{491}$$

Falls auf einem Intervall $J := (s, t) \subseteq D(\alpha)$ eine stetig differenzierbare Funktion $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\forall x \in U : f(x, y(x)) = \alpha, \tag{492}$$

so erfüllt f die Differentialgleichung

$$y'(x) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y(x)) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y(x)) = 0 \tag{493}$$

Lemma 10.13

Es sei die Differentialgleichung

$$y'(x)Q(x, y(x)) + P(x, y(x)) = 0 \tag{494}$$

gegeben, wobei $P, Q : R \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen sind. Eine notwendige Bedingung an die Existenz einer stetig differenzierbaren Funktion $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q \tag{495}$$

in R ist die Gradientenfeldgleichung

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{496}$$

im Rechteck R .

Die Kombination beider Lemmata führt zu einem sehr mächtigen Werkzeug, um mit einem bestimmten Typ nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen umzugehen. Wir veranschaulichen dies in folgendem

Beispiel 10.14

Es sei die Differentialgleichung

$$(4y(x) - x)y'(x) = \frac{3}{2}x^2 + y(x) \quad (497)$$

gegeben. In der Notation des Lemmas 10.13 bedeutet dies

$$P(x, y) = 3x^2 + 2y \quad Q(x, y) = 2(x - 4y) \quad (498)$$

Offensichtlich erfüllen diese Funktionen auch die notwendige Bedingung

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (499)$$

zur Existenz einer stetig differenzierbaren Funktion f mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q \quad (500)$$

in einem geeignet gewählten Rechteck $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir erhalten jetzt folgendes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \quad \Rightarrow \quad f(x, y) = x^3 + 2xy + g(y) \quad (501)$$

mit einer zunächst unbekanntem Funktion g

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q \quad \Rightarrow \quad 2x + g'(y) = 2(x - 4y) \quad \Rightarrow \quad g'(y) = -8y \quad (502)$$

Dies legt die Funktion f bis auf eine additive Konstante fest:

$$f(x, y) = x^3 + 2xy - 4y^2 + c \quad (503)$$

Aus der Beziehung

$$f(x, y) = x^3 + 2xy - 4y^2 + c = \alpha \in \mathbb{R} \quad (504)$$

folgt jetzt durch Differentiation nach x die Beziehung

$$2x^2 + 2xy'(x) + 2y(x) - 8y(x)y'(x) = 0 \quad (505)$$

was unsere ursprüngliche Differentialgleichung (497) ist. Die Gleichung (504) liefert bei festem $\alpha \in \mathbb{R}$ zu dieser Differentialgleichung eine implizite Lösung, sofern diese Gleichung zum vorgegebenen Wert von α in der Form $y = y(x)$ aufgelöst werden kann.

Definition 10.15 Euler-Multiplikator

Es sei $R \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck und $P, Q : R \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen, die nicht notwendigerweise die Beziehung

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (506)$$

in R erfüllen. Eine stetig differenzierbare Funktion $M : R \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial(MP)}{\partial y} = \frac{\partial(MQ)}{\partial x} \quad (507)$$

heißt **Euler-Multiplikator**.

Falls die Differentialgleichung (499) also bei vorgegebenen P, Q nicht in ganz R erfüllt ist, so kann man versuchen, einen Euler-Multiplikator M anhand von (507) zu konstruieren, so dass sich wiederum die Situation der Lemmata 10.12 und 10.13 anwenden lässt.

Beispiel 10.16

Es sei $R : [1, 2] \times [1, 2]$ und die zu betrachtende Differentialgleichung

$$y'(x) Q(x, y(x)) + P(x, y(x)) = 0 \quad (508)$$

soll auf R untersucht werden. Hierbei seien

$$Q(x, y) = 2y^3x^4 + x^2y^2 \quad P(x, y) = 3y^4x^3 + y^3x \quad (509)$$

Die Differentialgleichung (499) ist auf R nicht erfüllt. Betrachten wir jedoch die Funktion

$$M : R \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto M(x, y) := \frac{1}{xy^2}, \quad (510)$$

so gilt die Differentialgleichung (507) und dies liefert die neue Differentialgleichung

$$y'(x)(2y(x)x^3 + x) + (3y^2(x)x^2 + y(x)) = 0, \quad (511)$$

die auf die implizite Lösungsgestalt

$$y^2(x)x^3 + y(x)x = c \quad (512)$$

mit einer reellen Konstante c führt. In Abhängigkeit der gewählten Konstante c sind die jetzt möglichen Lösungen $y(x)$ durch Auflösung der Gleichung (512) zu untersuchen.