

11. Einführung zu Kompakten Symmetrischen Operatoren

Wir haben zu Beginn im zweiten Kapitel, Theorem 2.3, den Spektralsatz für symmetrische lineare Abbildungen in endlichdimensionalen reellen Vektorräumen erwähnt und es als eine der Zielsetzungen ausgegeben, diesen Satz unter bestimmten Bedingungen in die Theorie unendlichdimensionaler Hilberträume hineinzutragen. Wir skizzieren im folgenden die Situation bei kompakten symmetrischen Operatoren, wo wir sehr viel Gemeinsamkeiten mit dem endlichdimensionalen Fall erkennen werden.

Entscheidend hierfür ist zunächst der Begriff des kompakten Operators, den wir an folgender Überlegung motivieren wollen.

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ irgendeine beschränkte Folge im \mathbb{C} -Hilbertraum l^2 mit Standard-Orthonormalbasis $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Somit kann jedes Element x_n der Folge in der folgenden Form geschrieben werden:

$$x_n = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^n e_j \quad x_j^n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (513)$$

Die Abbildung $K : D(K) \subseteq l^2 \rightarrow l^2$ sei so konstruiert, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D(K)$ und es gelte

$$Kx_n := \frac{1}{n!} x_n^n e_n \quad (514)$$

In diesem Fall haben wir also die Situation, dass wir aus dem Abbild $(Kx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der beschränkten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in jedem Fall eine konvergente Teilfolge auswählen können.

Diese Situation erinnert an das Kriterium für Folgenkompaktheit und gibt Anlaß zu folgender, allgemein gefasster

Definition 11.1

Eine lineare Abbildung K eines normierten Raumes E in einen normierten Raum F heisst **kompakt**, wenn das Bild $(Kx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jeder beschränkten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge enthält.

Wir wollen zielstrebig zu einem Resultat gelangen, das uns ein hinreichendes Kriterium dafür in die Hand gibt, wann ein in l^2 agierender Operator kompakt ist. Dies ist von großer Bedeutung, etwa für Tridiagonaloperatoren, wie sie in der Quantenmechanik ständig auftreten. Es wird uns ein spektraltheoretisches Werkzeug zu ihrer Behandlung liefern.

Als erstes vergewissern wir uns der Tatsache, dass jeder kompakte Operator sogar stetig ist:

Lemma 11.2

Es sei K ein kompakter Operator des normierten Raumes E in den normierten Raum F . Dann ist K stetig, d. h. es existiert insbesondere der Ausdruck

$$\|K\| := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Kx\|}{\|x\|}$$

Beweis

Wir nehmen an, dass K unstetig, d.h. unbeschränkt ist. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in E$, sowie $\|x_n\| = 1$ und $\|Kx_n\| \geq n$ ab einem gewissen Index $N \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist die Folge beschränkt, und daher gilt insbesondere für jede Teilfolge $(x_{n_j}) \subseteq (x_n)$, dass

$$\|Kx_{n_j}\| \geq n_j \tag{515}$$

ab einem gewissen Index $N_j \in \mathbb{N}$. Dies bedeutet aber, dass keine der aus den Elementen Kx_{n_j} gebildeten Folgen konvergieren können. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu der geforderten Eigenschaft der Kompaktheit von K . Somit ist K in der Tat stetig.

Um das erwähnte hinreichende Kriterium für die Kompaktheit von Operatoren in l^2 herzuleiten, benötigen wir zudem das folgende Lemma, das eine Aussage darüber macht, wann ein kompakter Operator als Grenzelement einer Folge kompakter Abbildungen aufgefasst werden kann:

Lemma 11.3

Konvergiert die Folge der kompakten Abbildungen K_n eines normierten Raumes E in einen Banachraum F gleichmäßig gegen K , so ist K ein kompakter Operator.

Beweis

Wir folgen dem in "Funktionalanalysis" von Harro Heuser, [He], Kapitel 5, dargelegten Beweis. Es sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in E , d.h. es gebe eine positive Zahl γ , so dass

$$\forall i \in \mathbb{N} : \quad \|x_i\| \leq \gamma \tag{516}$$

Dann existiert eine Teilfolge $(x_{1i})_{i \in \mathbb{N}} \subseteq (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, so dass die Folge, welche aus den Elementen $K_1 x_{1i}$ gebildet wird, für $i \rightarrow \infty$ konvergiert.

Dementsprechend können wir auch eine Teilfolge $(x_{i2})_{i \in \mathbb{N}} \subseteq (x_{1i})_{i \in \mathbb{N}}$ konstruieren, so dass $K_2 x_{i2}$ konvergiert etc.

Dieses Verfahren wenden wir iterativ an und erkennen, dass die Folge $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ der Diagonalglieder, gegeben durch

$$y_i := x_{ii} \quad i \in \mathbb{N} \tag{517}$$

ab einem gewissen Index eine Teilfolge jeder der Folgen $(x_{k1}), (x_{k2}), \dots$ ist. Somit konvergiert die Folge $(K_n y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ für jeden Operator K_n . Es werde jetzt ein $\epsilon > 0$

beliebig gewählt und ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ vorgegeben, so dass

$$\|K_{n_0} - K\| < \epsilon \quad (518)$$

Beachte hierbei, dass die Operatoren K_n allesamt stetig sind und die geforderte Voraussetzung der gleichmäßige Konvergenz der Operatoren K_n gegen K bedeutet, dass die Operatoren $K_n - K$ stetig sind, daher eine Norm $\|K_n - K\|$ besitzen, und dass diese Norm für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht.

Fixieren wir jetzt $i_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für $i, k \geq i_0$ stets

$$\|K_{n_0}y_i - K_{n_0}y_k\| \leq \epsilon \quad (519)$$

so erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} \|Ky_i - Ky_k\| &\leq \|Ky_i - K_{n_0}y_i\| + \|K_{n_0}y_i - K_{n_0}y_k\| + \|K_{n_0}y_k - Ky_k\| < \\ &\epsilon\|y_i\| + \epsilon + \epsilon\|y_k\| \leq (2\gamma + 1)\epsilon \end{aligned} \quad (520)$$

Dies bedeutet aber, dass die Folge $(Ky_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im Banachraum F ist und somit gegen ein Grenzelement in F konvergiert. D.h. diese Folge ist insbesondere eine konvergente Teilfolge von $(Kx_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Da $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine beliebige beschränkte Folge war, bedeutet dies aber gerade die Kompaktheit von K .

Dies erbringt uns jetzt ein hinreichendes Kriterium für die Kompaktheit von Operatoren in l^2 :

Lemma 11.4

Es sei $(\alpha_{ik})_{i,k \in \mathbb{N}}$ eine unendliche Matrix mit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}|^2 < \infty \quad (521)$$

Fernerhin sei $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ ein beliebiges Element in l^2 . Die Abbildung $K : l^2 \rightarrow l^2$ sei gegeben durch

$$Kx := K(\xi_1, \xi_2, \dots) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1k} \xi_k, \dots, \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k, \dots \right) \quad (522)$$

Dann ist K ein kompakter Operator auf l^2 .

Beweis

Wir folgen auch hier wiederum der Darstellung in [He]. Zunächst folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass für jedes $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ in l^2 die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} \xi_k$ konvergieren, und dass fernerhin

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} \xi_k \right|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \quad (523)$$

Damit ist klar, dass K in der Tat l^2 nach l^2 abbildet. Die Linearität der Abbildung K ist nach ihrer Definition klar. Ihre Stetigkeit und damit Beschränktheit erkennt man wie folgt:

$$\|Kx\| \leq \sqrt{\sum_{i,k \in \mathbb{N}} |\alpha_{ik}|^2} \|x\| \quad (524)$$

für beliebiges $x \in l^2$. Definieren wir die Operatoren

$$K_n : l^2 \rightarrow l^2, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto K_n x := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1k} \xi_k, \dots, \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k, 0, 0, \dots \right), \quad (525)$$

so gilt

$$\|Kx - K_n x\| \leq \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}|^2} \|x\| \quad (526)$$

für alle $x \in l^2$ und daher

$$\|K - K_n\| \leq \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}|^2} \quad (527)$$

Für $n \rightarrow \infty$ geht die rechte Seite dieser letzten Beziehung gegen 0, und daher konvergieren die K_n gleichmäßig gegen K . Nach Lemma 11.3 ist aber damit K ein kompakter Operator in l^2 .

Wir geben schließlich den Entwicklungssatz für kompakte symmetrische Operatoren in einem komplexen Hilbertraum.

Theorem 11.5

Genau dann gilt für einen linearen Operator A eines \mathbb{C} -Hilbertraums E die Darstellung

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(x, u_n) u_n \quad (528)$$

für jedes beliebige $x \in E$ und mit einer endlichen oder gegen 0 strebenden festen Folge reeller Zahlen $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowie einer festen Folge orthonormaler Vektoren $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sofern A symmetrisch und kompakt ist.

Beweis

Wir zeigen im folgenden lediglich, dass $\|A\|$ gleich dem Betrag des größten Eigenwerts von A ist und verweisen den interessierten Leser auf die vollständige Beweisführung von Theorem 11.5 in [He], Kapitel 5.

Für den symmetrischen Operator A gilt zunächst

$$\sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \|A\|$$

Dieses Fakt erkennt man wie folgt: Bezeichnen wir zunächst

$$\nu(A) := \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|,$$

so erkennen wir trivialerweise $\nu(A) \leq \|A\|$. Wir wollen jetzt zeigen, dass auch $\nu(A) \geq \|A\|$ gilt. Für eine beliebige Zahl $\lambda > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & 4 \|Ax\|^2 = \\ & (A(\lambda x + \frac{1}{\lambda}Ax), \lambda x + \frac{1}{\lambda}Ax) - (A(\lambda x - \frac{1}{\lambda}Ax), \lambda x - \frac{1}{\lambda}Ax) \\ & \leq \nu(A) (\|\lambda x + \frac{1}{\lambda}Ax\|^2 + \|\lambda x - \frac{1}{\lambda}Ax\|^2) \\ & = 2\nu(A)(\lambda^2\|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|Ax\|^2) \end{aligned} \quad (529)$$

wobei wir in der letzten Beziehung den Parallelogrammsatz

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (530)$$

für beliebige Vektoren x, y des zugrundegelegten Hilbertraums benutzt haben.

Setzen wir jetzt

$$\lambda^2 = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (531)$$

so erhalten wir die gesuchte Abschätzung $\|Ax\| \leq \nu(A)\|x\|$. Letzteres gilt insbesondere auch im Fall $x = 0$. Insgesamt haben wir damit $\|A\| = \nu(A)$ gezeigt. Infolgedessen existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Zahl $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\mu = \|A\| > 0$, so dass

$$\|x_n\| = 1 \quad (Ax_n, x_n) \rightarrow \mu \quad (532)$$

für $n \rightarrow \infty$. Aus der Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Ax_n - \mu x_n\|^2 &= \|Ax_n\|^2 - 2\mu (Ax_n, x_n) + \mu^2 \|x_n\|^2 \leq \\ & \|A\|^2 - 2\mu (Ax_n, x_n) + \|A\|^2 \end{aligned} \quad (533)$$

folgt insbesondere

$$Ax_n - \mu x_n \rightarrow 0 \quad (534)$$

Aufgrund der Kompaktheit von A besitzt die Folge $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge (Ax_{n_k}) und somit folgt aus der letzten Gleichung, dass x_{n_k} gegen ein normiertes Element $u \in E$ strebt. Weiterhin gilt

$$Au - \mu u = 0 \quad (535)$$

d.h. u ist wegen $|\mu| = \|A\|$ Eigenvektor von A zum Eigenwert $\|A\|$ bzw. $-\|A\|$. Damit gilt aber

$$|(Au, u)| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$$

Auf der anderen Seite ist jeder Vektor u , der der letzten Gleichung genügt, ein Eigenvektor von A zu den Eigenwerten $\|A\|$ bzw. $-\|A\|$. Dies kann verdeutlicht werden, in dem die Folgeelemente x_n alle zu u gewählt werden.