Differentialformen
Wintersemester 2011/2012

PD Dr. Peter Massopust
18. Januar 2012

Übungsblatt 10

1. Es seien $\phi \in \Omega_p(U;\mathbb{R})$ und $\psi \in \Omega_{p-1}(U;\mathbb{R})$, wobei wie üblich $U \subseteq \mathbb{R}^k$ ist. Man beweise die *Greensche Formel*:

$$d(\psi \wedge *\phi) = d\psi \wedge (*\phi) + \psi \wedge (*\delta\phi) = \langle\, d\psi,\, \phi\rangle_p \, dV + \langle\, \psi,\, \delta\phi\rangle_{p-1} \, dV.$$

2. Für $\phi, \psi \in \Omega_p(U;\mathbb{R})$, zeige man folgenden Identitäten:

   (a) $d(\delta\psi \wedge *\phi) = \langle\, d\delta\psi,\, \phi\rangle_p \, dV + \langle\, \delta\psi,\, \delta\phi\rangle_{p-1} \, dV$.

   (b) $d(\psi \wedge *d\phi) = \langle\, d\psi,\, d\phi\rangle_{p-1} \, dV + \langle\, \psi,\, \delta d\phi\rangle_p \, dV$.

   (c) $d(\delta\psi \wedge *\phi + \phi \wedge *d\psi) = \langle\, \delta\psi,\, \delta\phi\rangle_{p-1} \, dV + \langle\, \Delta\psi,\, \phi\rangle_p \, dV + \langle\, d\psi,\, d\phi\rangle_{p+1} \, dV$.

   (d) Für $p := 0$ und Funktionen f und g der Klasse C^∞ lautet (c):

$$d(f(*dg)) = (\Delta g)\, f \, dV + \langle\, df,\, dg\rangle_1 \, dV.$$

   (e) $(\langle\, \Delta\psi,\, \phi\rangle_p - \langle\, \Delta\phi,\, \psi\rangle_p)\, dV = d(\delta\psi \wedge *\phi - \delta\phi \wedge *\psi + \phi \wedge *d\psi - \psi \wedge *d\phi)$.

   (f) Für $p := 0$ und Funktionen f und g der Klasse C^∞ lautet (d):

$$((\Delta g)\, f - f\, (\Delta g))\, dV = d(f(*dg) - g(*df)).$$

3. Es sei $j : T_x \to T_x^* = \Omega_1(U;\mathbb{R})$, $\frac{\partial}{\partial x} \mapsto dx$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$, der kanonische Vektorraumisomorphisms zwischen Vektorfeldern und Pfaffschen Formen. Man zeige, daß für $f \in \Omega_0(U;\mathbb{R})$ und $X \in T_x$ gilt:

   (a) $\mathrm{div} X = \delta j X = *d * jX$.

   (b) $\mathrm{grad} f = j^{-1} df$.

   (c) $\mathrm{rot} X = j^{-1} * d\, j\, X$.

4. Man benutze die Definitionen von $\mathrm{grad}, \mathrm{div}$ und rot in 3., sowie die Eigenschaften der äußeren Ableitung d und der Co-ableitung δ, um folgende Identitäten der Vektoranalyse herzuleiten.

   (a) $\mathrm{grad}(f \cdot g) = f \cdot \mathrm{grad}\, g + g \cdot \mathrm{grad}\, f$.

   (b) $\mathrm{div}(f \cdot X) = f \cdot \mathrm{div}\, X + \langle\, \mathrm{grad}\, f,\, X\rangle$.

   (c) $\mathrm{rot}(f \cdot X) = f \cdot \mathrm{rot}\, X + \mathrm{grad}\, f \times X$.

   (d) $\mathrm{rot}(X \times Y) = (\mathrm{div}\, Y) \cdot X - (\mathrm{div}\, X) \cdot Y - [X, Y]$.

   (e) $\Delta(f \cdot g) = f \cdot \Delta g + g \cdot \Delta f + 2\langle\, \mathrm{grad}\, f,\, \mathrm{grad}\, g\rangle$.