Differentialformen
Wintersemester 2011/12

PD Dr. Peter Massopust
30. November 2011

Übungsblatt 6

1. Auf dem $\mathbb{R}^3$ sei eine 2-Differentialform ω durch

$$\omega := -(z^2 + e^x)\, dx \wedge dy + 2xz\, dy \wedge dz + dz \wedge dx$$

gegeben. Man zeige, daß ω geschlossen ist, und man bestimme eine Pfaffsche Form ϕ auf dem $\mathbb{R}^3$, so daß $\omega = d\phi$ gilt.

2. Auf dem $\mathbb{R}^3$ sei die Pfaffsche Form $\omega := y\, dx - x\, dy + dz$ gegeben. Ferner seien $u = u(x, y, z)$ und $v = v(x, y, z)$ Funktionen der Klasse C^1.

   (a) Man leite Bedingungen für die Funktionen u and v her, so daß die Form $\omega - v\, du$ geschlossen ist. Man zeige, daß dann u und v von z unabhängig sind.

   (b) Kann $v = V(x, y)$ beliebig vorgegeben werden?

   (c) Man zeige: Genügen die Funktionen u und v den in (a) abgeleiteten Bedingungen, so sind die Differentialformen du, dv und $\omega - v\, du$ linear unabhängig.

3. Man berechne den Wert der 2-Differentialform

$$\omega = (x_1 x_2 + x_3^2)\, dx_1 \wedge dx_2 - (x_1 + x_3)^2\, dx_2 \wedge dx_3 + (x_2^2 - x_3)\, dx_3 \wedge dx_1$$

am Punkt $\boldsymbol{x} := (1, -2, 1)$ auf den Vektoren $\boldsymbol{\xi} := (1, 1, 2)^\top$ und $\boldsymbol{\eta} := (-1, 0, 3)^\top$.

4. Über dem $\mathbb{R}^k$ betrachte man die $(k-1)$-Differentialform

$$\omega := \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \frac{x_i}{r^\alpha}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k,$$

wobei $r := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist.

   (a) Man bestimme α, so daß $d\omega = 0$ ist.

   (b) Man setze $k := 3$ und benutze für α den in (a) gefundenen Wert. Existiert bezüglich einer sternförmigen Menge um den Punkt $(0, 0, 1)$ eine $(k-2)$-Differentialform ϕ, so daß $\omega = d\phi$ ist?