Differentialformen
Wintersemester 2011/2012

PD Dr. Peter Massopust
14. Dezember 2011

Übungsblatt 8

1. Man zeige, daß die Bilinearformen $\langle\,\cdot,\,\cdot\rangle_p$ die durch Definition 69 gegeben sind Skalarprodukte auf $A_p(V,\mathbb{R})$ sind, und daß im Falle $p=n$, $\langle\,\cdot,\,\cdot\rangle_p$ mit dem gegebenen Skalarprodukt auf V zusammenfällt.

2. Es sei $V := \mathbb{R}^3$, versehen mit der kanonischen Orientierung. Für ein beliebig gegebenes $\phi \in A_2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ berechne man $*\phi$.

3. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit fest gewähltem Sklalarprodukt $\langle\,\cdot,\,\cdot\rangle$ und fest gewählter Orientierung. Sei $\{b_1,\ldots,b_n\}$ irgendeine Basis von V und $\{b_1^*,\ldots,b_n^*\}$ die dazugehörige Dualbasis. Des Weiteren bezeichne $j : V \to V^*$ den kanonischen Isomorphismus zwischen V und seinem algebraischen Dualraum V^*, der durch $\langle\,\cdot,\,\cdot\rangle$ induziert wird. Man definiere
$$ds := \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\, b_\nu^*(\cdot) \in A_1(V,\mathbb{R}),$$
und zeige daß $ds(v) = v$ ist, für alle $v \in V$.

   Ferner sei
$$dF := *ds = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\,(*b_\nu^*)(\cdot) \in A_{n-1}(V,\mathbb{R}).$$
   Man zeige, daß folgende Aussagen gelten.

   (a) $ds \wedge dF = n\, dV$,

   (b) $jv = \langle\, v,\, ds\rangle$, für alle $v \in V$,

   (c) $*(jv) = \langle\, v,\, dF\rangle$, für alle $v \in V$,

   (d) $*(jv) = dV(v,\cdot,\ldots,\cdot)$, für alle $v \in V$.