Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Brigitte Forster
Dipl. Math. Stefan Held

Wintersemester 2011
Übungsblatt 1
Abgabetermin 28. Oktober 2011

Distributionen

Die Hausaufgaben sind zu Lösen um den Notenbonus zu erhalten. Die restlichen Aufgaben liefern Zusatzpunkte.
Bitte achten Sie darauf Ihre Lösungen korrekt zu formulieren - benutzen Sie gegebenenfalls Quantoren.

Hausaufgabe 1 (Die schwingende Saite)

a) *Geben Sie die allgemeine Lösung* $u(t, x),\ t, x \in \mathbb{R}$, *der Differentialgleichung*

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

an. In welchem Funktionenraum befindet sich die Lösung?

b) *Betrachten Sie das Problem in einem um* $\frac{\pi}{4}$ *gedrehten Koordinatensystem:*

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + x),\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x).$$

Geben Sie die allgemeine Lösung an. In welchem Funktionenraum befindet sich diese?

4 Punkte

Hausaufgabe 2
Sei $\mathcal{M}$ *eine Menge. Geben Sie die gröbste und die feinste Topologie für* $\mathcal{M}$ *an. Geben Sie eine Menge* $\mathcal{M}$ *an, für die beide Topologien übereinstimmen.* 2 Punkte

Hausaufgabe 3 (Stetigkeit und topologische Basen)
Es seien (X, τ) *und* (X', τ') *zwei topologische Räume. Weiter sei* $\mathcal{B}'$ *eine Basis von* τ' *und* $f : X \to X'$ *eine Abbildung.*
Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) f *ist stetig.*

b) $f^{-1}(B') \in \tau,\ \forall B' \in \mathcal{B}'$.

4 Punkte

Aufgabe 4 (Starke und schwache Konvergenz im Hilbertraum)
Es sei H *ein Hilbertraum und* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* H. *Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gleichwertig sind:*

a) $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ *schwach in* H *und* $\|u_n\| \to \|u\|$.

b) $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ *stark, das heißt bezüglich der Normtopologie.*

(2 Punkte)