Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Brigitte Forster
Dipl. Math. Stefan Held
http://www-m6.ma.tum.de/Lehrstuhl/Distributionen_201112WS

Wintersemester 2011
Übungsblatt 2
Abgabetermin 04. November 2011

Distributionen

Hausaufgabe 5 (Beispiele unendlich oft differenzierbarer Funktionen)
Es bezeichne $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ den Raum aller C^∞-Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger.

a) *Betrachten Sie die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto f(x) := \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \forall x > 0, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Gilt $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$? Geben Sie den Träger von f an.

b) *Geben Sie eine Funktion an, die in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ liegt.*

4 Punkte

Definition 1 (Funktionen, die im Unendlichen verschwinden)**.** *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Man sagt, dass eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ im Unendlichen verschwindet genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists K \subset \Omega \text{ kompakt} : \ |f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in \Omega \setminus K.$$

Hausaufgabe 6 (Funktionen, die im Unendlichen verschwinden)
Der Raum

$$X = \{f : \Omega \to \mathbb{C}, f \text{ ist stetig und beschränkt}\}$$

ist, versehen mit der Supremumsnorm, ein Banchraum.
Es sei

$$\widetilde{X} := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \ f \text{ ist stetig und verschwindet im Unendlichen}\}.$$

Zeigen Sie, $\widetilde{X}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von X. Was sagt dies über $\widetilde{X}$ aus? 4 Punkte

Hausaufgabe 7 (Eine unstetige Linearform)
Es sei

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ \exists n \in \mathbb{N},\, a_k \in \mathbb{R}, k = 0, \ldots, n : \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ \forall x \in \mathbb{R} \right\}$$

der Raum der Polynome in $\mathbb{R}$.
Es sei

$$\mathfrak{p} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ p \mapsto \sup_{0 \le x \le 1} |p(x)|.$$

Zeigen Sie

a) *$\mathfrak{p}$ ist eine Norm auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

b) *Die Linearform $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ p \mapsto p(2)$ ist nicht stetig.*

2 Punkte

Aufgabe 8 (Eine unstetige folgenstetige Funktion)
Es sei $X \neq \emptyset$ *und* $\tau := \emptyset \cup \{A : X \setminus A \text{ ist abzählbar}\}$.

a) τ *ist eine Topologie.*

b) *Die Funktion* $\mathbf{Id} : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ *ist folgenstetig, jedoch nicht stetig.*

(2 Punkte)

Definition 2 (Die konvexe Hülle)**.** *Es sei* X *ein Vektorraum und* $A \subseteq X$. *Die Menge*

$$co(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i : x_i \in A,\, t_i \geq 0,\, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1,\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

heißt konvexe Hülle von A.

Aufgabe 9 (Die konvexe Hülle)
Es sei X *ein Vektorraum und* $A \subseteq X$.

a) *Der Schnitt einer Familie* $\{A_i\}_{i \in I}$ *konvexer Mengen ist konvex.*

b) $co(A)$ *ist konvex.*

c) $co(A)$ *ist der Schnitt aller konvexen Mengen, die* A *enthalten.*

d) *Wenn* X *ein lokal-konvexer Vektorraum ist, so ist die konvexe Hülle jeder beschränkten Menge beschränkt.*

(4 Punkte)