

# Distributionen

## Hausaufgabe 24 (Beispiele von Distributionen)

Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Zeigen Sie, ob folgende Ausdrücke Distributionen darstellen und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Ordnung:

- a) Sei  $\mu$  ein Borelmaß auf  $\Omega$ .  
 $T_\mu(\phi) = \int_\Omega \phi(x) d\mu, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .
- b) Sei  $x \in \mathbb{R}$ .  
 $T(\phi) = \phi'(x), \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .
- c)  $T(\phi) = \int_\Omega |\phi(x)| dx, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .
- d) Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .  
 $T(\phi) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \phi(kx_0), \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .
- e)  $T(\phi) = \int_\Omega \phi(x)^2 dx, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

Zeigen Sie, dass  $T$  aus b) kein Maß ist.

5 Punkte

## Hausaufgabe 25 (Distributionelle Ableitungen)

Berechnen Sie

- a) alle distributionellen Ableitungen von  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto |x|$ .
- b) die distributionellen Ableitungen  $h_{x_1}$  und  $h_{x_1, x_2}$  von

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(x_1, x_2) := \begin{cases} x_1 x_2 & \forall x_1, x_2 \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3 Punkte

## Hausaufgabe 26

Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  ein Gebiet und  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Desweiteren sei  $\psi \in C^\infty(\Omega)$ . Berechnen Sie die die Ableitung  $D(\psi T)$

2 Punkte

## Aufgabe 27 (Der Cauchysche Hauptwert)

Es seien  $f(x) = \ln |2 \sin(\frac{x}{2})|$  und  $g(x) = \frac{1}{2} \cot(\frac{x}{2})$  auf  $\Omega = ]-\pi, \pi[$ .

- a)  $f$  definiert eine reguläre Distribution auf  $\Omega$ .
- b) Der Cauchysche Hauptwert  $CH(g)$  existiert und es gilt

$$f' = CH(g) \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

(2 Punkte)