Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Brigitte Forster
Dipl. Math. Stefan Held
http://www-m6.ma.tum.de/Lehrstuhl/Distributionen_201112WS

Wintersemester 2011
Übungsblatt 8
Abgabetermin 15. Dezember 2011

Distributionen

Hausaufgabe 33 (Konvergenz von Funktionenfolgen)
Untersuchen Sie die punkteweise Konvergenz und die Konvergenz im Distributionensinn für die Folgen:

(i) $f_n(t) = \sin nt$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| \geq \frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2} & \text{für } |t| < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

(iii) $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| \geq \frac{1}{n}, \\ n^2 & \text{für } |t| < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

3 Punkte

Aufgabe 34
Betrachten Sie $T_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{2}|x|^{\varepsilon-1}$, $\varepsilon > 0$.
Bestimmen Sie $T = \lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon$. (2 Punkte)

Aufgabe 35 (Funktionenfolgen, die gegen die Diracdistribution konvergieren)
Es sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1_{loc}$ *eine Funktionenfolge, die folgende Bedingungen erfülle:*

a) $\exists M > 0, R_0 > 0 : \int_{B_{R_0}(0)} |f_k(x)|dx < M \ \forall k \in \mathbb{N}$,

b) $\lim_{k\to\infty} \sup_{r\leq|x|\leq r^{-1}} |f_k(x)| = 0 \ \forall r \in]0, 1[$,

c) $\lim_{k\to\infty} \int_{B_r(0)} f_k(x)dx = 1 \ \forall r \in \mathbb{R}^+$.

Dann gilt im distributionellen Sinn $\lim_{k\to\infty} f_k = \delta_0$. (2 Punkte)

Hausaufgabe 36 (Träger von Distributionen und Multiplikation)

(i) Sei $f \in C^\infty$ *mit* $f = 0$ *auf* $\operatorname{supp} T$. *Dann folgt* ***nicht*** $fT = 0$.

(ii) Sei $\varphi \in \mathcal{D}$ *mit* $T(\varphi) = 0$. *Dann folgt* ***nicht*** $\varphi T = 0$.

(iii) Sei $\varphi \in \mathcal{D}$ *mit* $\varphi T = 0$. *Dann gilt* $T(\varphi) = 0$.

5 Punkte

Hausaufgabe 37 (Träger von Distributionen und Addition)
Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet und* $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Zeigen Sie, dass*

$$\operatorname{supp}(S + T) \subseteq \operatorname{supp}(S) \cup \operatorname{supp}(T).$$

2 Punkte