

Distributionen

Hausaufgabe 43 (Differentialgleichungen)

Bestimmen Sie jeweils eine Lösung der Differentialgleichungen

a) $y'' + 2y' + y = \delta,$

b) $y'' + 2y' + y = \delta'.$

4 Punkte

Hausaufgabe 44 (Faltung und Träger)

Es seien f, g stetige Funktionen auf \mathbb{R} und g habe zusätzlich kompakten Träger.

Zeigen Sie:

$$\text{supp}(f * g) \subset \text{supp } f + \text{supp } g.$$

2 Punkte

Hausaufgabe 45 (Faltung auf $L^1(\mathbb{R}^n)$)

Zeigen sie, dass die Faltung auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ kommutativ und assoziativ ist.

2 Punkte

Hausaufgabe 46 (Beispiel eine Faltung)

Berechnen Sie für $a, b > 0$

$$\chi_{[-a,a]} * \chi_{[-b,b]},$$

geben Sie den Träger der Funktion an und zeichnen Sie die Funktion.

2 Punkte

Aufgabe 47 (Translation auf L^∞)

Wir betrachten die Translation $\tau_s : f \mapsto \tau_s f, s \in \mathbb{R}$.

a) τ_s ist stetig auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $1 \leq p < \infty$.

b) τ_s ist nicht stetig auf $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

c) Es sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Dann gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{u - \tau_s u}{s} = Du.$$

(3 Punkte)