

Distributionen

Hausaufgabe 48 (Faltung und Assoziativität)

Es sei mit H wie üblich die Heavisidefunktion bezeichnet.

Berechnen Sie

a) $(1 * \delta') * H$,

b) $1 * (\delta' * H)$.

Erklären Sie die Ergebnisse.

2 Punkte

Hausaufgabe 49 (Die Wellengleichung)

Betrachten Sie die Funktion

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } t - |x| > 0, \\ 0 & \text{falls } t - |x| \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion E eine Fundamentallösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta$$

ist.

4 Punkte

Hausaufgabe 50

Betrachten Sie die Folge von Distributionen

$$T_1 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}), \quad T_k = T_{k-1} * T_1 \quad \forall k \geq 2.$$

(i) Zeigen Sie $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$.

(ii) Berechnen Sie $T_2 = T_1 * T_1$.

(iii) Zeigen Sie $T_k = \frac{1}{2^k} \left(\sum_{i=0}^k C_k^i \delta_{2i-k} \right)$.

4 Punkte

Definition 5 (Faltung von Distributionen). *Es seien $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Die Faltung von F mit G sei definiert als*

$$F * G(\phi) := (F(x) \times G(y))(\phi(x + y)), \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Definition 6 (Die Streifenbedingung). *Es seien $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Mit*

$$M := \text{supp}(F \times G) = \text{supp}(F) \times \text{supp}(G) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

sei der Träger des direkten Produkts von F mit G bezeichnet.

Dann erfüllen F und G die Streifenbedingung genau dann, wenn

$$M_a := M \cap T_a = \text{supp}(F \times G) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : |x + y| < a\} \quad (1)$$

für jedes $a > 0$ beschränkt ist.

Aufgabe 51 (Definition der Faltung von Distribution mittels des direkten Produkts)

Es seien $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ zwei Distributionen, die der Streifenbedingung (1) genügen.

*Dann ist die in Definition 5 definierte Faltung $F * G$ eine Distribution in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Es gilt*

$$\text{supp } F * G \subset \text{supp}(F) + \text{supp}(G).$$

Für reguläre Distributionen, die der Streifenbedingung genügen stimmt die Definition 5 mit der klassischen Definition überein.

Sei $H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine weitere Distribution und sei die Menge

$$A_a := \text{supp } F \times G \times H \cap \{(x, y, z) : |x + y + z| < a\}$$

beschränkt für alle $a > 0$.

Dann ist

$$(F * G) * H = F * (G * H) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$