Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Brigitte Forster
Dipl. Math. Stefan Held

Sommersemester 2011
Übungsblatt 1

Fourier-Analysis

Definition 1 (Orthonormalsystem)**.** *Sei* $(H, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ *ein Hilbert-Raum. Eine abzählbare Folge* $e_n \in H$, $n \in I \subset \mathbb{N}$ *heißt Orthonormalsystem, falls für alle* $n, m \in I$ *gilt:*

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m}.$$

Aufgabe 1 (Orthonormalsysteme)
Sei $\{e_1, \ldots, e_N\}$, $N \in \mathbb{N}$ *ein endliches Orthonormalsystem in* H *und* $H_N = \operatorname{span}\{e_1 \ldots, e_N\} \subset H$ *der von ihnen aufgespannte Untervektorraum. Dann definiert*

$$P : H \to H, \quad Px = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle \, e_n$$

einen stetigen linearen Operator. Zeigen Sie:

a) P *ist ein Projektionsoperator, d.h.* $P^2 = P$.

b) *Für alle* $x \in H$ *gilt die Besselsche Ungleichung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} | \langle x, e_n \rangle |^2 \leq \|x\|^2.$$

Insbesondere ist $\|P\| = 1$.

Hinweis: Nutzen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

c) *Zeigen Sie, dass die Menge*

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\bullet} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

ein Orthonormalsystem in $L^2([\,0, 2\pi\,])$ *ist.*

Definition 2 (Orthonormalbasis)**.** *Sei* $(H, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ *ein Hilbert-Raum. Ein Orthonormalsystem* $e_n \in H$, $n \in I \subset \mathbb{N}$ *heißt Orthonormalbasis von* H*, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

a) *Der Abschluss* $\overline{\operatorname{span}\{e_n \mid n \in I\}} = H$.

b) $x = \sum_{n \in I} \langle x, e_n \rangle \, e_n$ *für alle* $x \in H$.

c) $\|x\|^2 = \sum_{n \in I} | \langle x, e_n \rangle |^2$ *für alle* $x \in H$.

d) *(Parseval-Identität)* $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in I} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$ *für alle* $x, y \in H$.

Aufgabe 2 (Orthonormalbasis)
Zeigen Sie, dass die Bedingungen in Definition 2 äquivalent sind.

Definition 3 (Vollständigkeit und Defizit). *Sei $(X, \|\bullet\|)$ ein vollständiger normierter Vektorraum. Eine Familie $\{e_n, n \in I \subset \mathbb{N}\}$ heißt vollständig in X, wenn*

$$\overline{\operatorname{span}\{e_n \mid n \in I\}} = X.$$

Die Familie hat Defizit $a \in \mathbb{N}$, wenn es a Elemente $x_1, \dots, x_a$ in X gibt, so dass

(i) $\overline{\operatorname{span}\{e_n \mid n \in I\} \cup \{x_1, \dots, x_a\}} = X$, *und*

(ii) die Zahl $a \in \mathbb{N}$ minimal ist mit dieser Eigenschaft.

Aufgabe 3 (Vollständigkeit und Defizit)
Zeigen Sie:

a) *Das trigonometrische System $\{e^{in\bullet}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ hat Defizit 1 in $C([-\pi, \pi])$.*

b) *Das trigonometrische System $\{e^{in\bullet}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ im Raum $L^2([-A, A])$ ist nicht vollständig, falls $A > \pi$.*

Aufgabe 4 (Eigenschaften der Fourierkoeffizienten)
Sei $f, g \in L^1([-\pi, \pi])$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass für die Fourier-Koeffizienten

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

folgende Aussagen gelten:

a) $(f+g)\widehat{\ }(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$ *und* $(\alpha f)\widehat{\ }(n) = \alpha \widehat{f}(n)$.

b) $\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$.

c) $(f(\cdot - x))\widehat{\ }(n) = \widehat{f}(n) e^{-inx}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

d) $(e^{ik\cdot} f)\widehat{\ }(n) = \widehat{f}(n-k)$.

e) $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1$.

Aufgabe 5 (Reele und komplexe Form)

a) *Trigonometrische Polynome können in reeller Form*

$$P(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad a_k, b_k \in \mathbb{C},$$

und in komplexer Form

$$P(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikt}, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

angegeben werden. Wie hängen a_k, b_k und c_k zusammen?

b) *Betrachten Sie für $f \in L^1([-\pi, \pi])$ die formale Fourier-Reihe*

$$f(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikt}.$$

Wie hängt sie mit der reellen Form

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

zusammen? Zeigen Sie, dass die Koeffizienten a_k und b_k genau dann reellwertig sind, wenn f reellwertig ist. Was lässt sich sagen, wenn f gerade oder ungerade ist?