Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Brigitte Forster
Dipl. Math. Stefan Held

Sommersemester 2011
Übungsblatt 3

Fourier-Analysis

Definition 5 (Der Raum $A(\mathbb{T})$ der absolut konvergenten Fourierreihen)**.** *Sei*

$$A(\mathbb{T}) := \{f \in C(\mathbb{T}) : \widehat{f} \in l^1(\mathbb{Z})\},$$

mit der Norm

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|.$$

Aufgabe 8 (Eigenschaften des Raumes $A(\mathbb{T})$)

a) *Zeigen Sie:* $(A(\mathbb{T}), \| \cdot \|_{A(\mathbb{T})})$ *ist ein Banachraum.*

b) *Es sei* $f \in C(\mathbb{T})$*. Zeigen Sie*

$$f \in A(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \exists g, h \in L^2(\mathbb{R}) : \; f = g * h.$$

Es gilt dann $\|f\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|g\|_2 \|h\|_2$.

c) *Der Banachraum* $A(\mathbb{T})$ *ist mit punktweiser Multiplikation eine kommutative Banachalgebra mit Einselement.*

d) *Es gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \|S_n f - f\|_{A(\mathbb{T})} = 0, \; \forall f \in A(\mathbb{T}).$$

Aufgabe 9 (Wieners Lemma)
Es sei $f \in A(T) : f(t) \neq 0, \; \forall t \in \mathbb{T}$*. Dann gilt* $\frac{1}{f(t)} \in A(\mathbb{T})$*, dass heißt*

$$\exists \{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z}) : \; \frac{1}{f(t)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{ikt}.$$

Aufgabe 10 (Der Satz von Bernstein)
Es sei $f \in Lip_\alpha(\mathbb{T})$ *für ein* $\alpha < \frac{1}{2}$*. Zeigen Sie, dass* $f \in A(\mathbb{T})$ *und*

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} \leq c_\alpha \|f\|_{Lip_\alpha},$$

wobei $c_\alpha \in \mathbb{R}^+$ *nur von* α *abhängt.*

Aufgabe 11 (Diskrete Faltung)
Es seien $f, g \in l^1(\mathbb{Z})$. Zeigen Sie:

a) *Für*

$$h(n) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n-k)g(k)$$

gilt $h \in l^1(\mathbb{Z})$ und $\|h\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$.

Definition 6 (Diskrete Faltung). *Es seien $f, g \in l^1(\mathbb{Z})$. Die Funktion $f * g := h \in l^1(\mathbb{Z})$ heißt diskrete Faltung von f und g.*

b) *Es sei $F : l^1(\mathbb{Z}) \to L^1(\mathbb{T}),\ x \to \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)e^{ik\,\cdot}$, dann gilt*

$$F(f * g) = F(f) \cdot F(g).$$

c) *$\big(l^1(\mathbb{Z}), +, *\big)$ ist eine kommutative Algebra.*

d) *Besitzt diese Algebra ein Einselement?*

Satz 7 (Der Satz von Banach Steinhaus). *Es seien X ein Banachraum und Y ein normierter Raum, I eine Indexmenge und $T_i : X \to Y$ seien lineare beschränkte Operatoren für alle $i \in I$. Falls*

$$sup_{i\in I}\|T_i x\|_Y < \infty,\ \forall x \in X,$$

so gilt sogar

$$\sup_{i\in I}\|T_i\|_{Op:X\to Y} < \infty.$$

Aufgabe 12 (Norm-Konvergenz von Fourierreihen)

$$\exists f \in L^1(\mathbb{T}) : \lim_{n\to\infty}\|S_n f - f\| \neq 0, \tag{1}$$

dass heißt, die Fourierreihe konvergiert nicht für alle Funktionen in $L^{1(\mathbb{T})}$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) *Beweisen Sie Satz 2.4.4 der Vorlesung.*

b) *Einschub: Zeigen Sie Satz 8d) dieses Übungsblattes mittels Satz 2.4.4 der Vorlesung.*

c) *Es sei*

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{int} = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin(\frac{t}{2})}.$$

Zeigen Sie:

$$S_n(f) = D_n * f$$

und

$$\|S_n\|_{Op:L^1\to L^1} \leq \|D_n\|_1 =: L_n.$$

d) *Geben Sie eine Abschätzung für die Lebesguekonstante L_n an.*

e) *Zeigen Sie, dass sogar gilt: $\|S_n\|_{Op:L^1\to L^1} = L_n$.*

f) *Folgern Sie die Behauptung (1)*