Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Brigitte Forster
Dipl. Math. Stefan Held

Sommersemester 2011
Übungsblatt 4

Fourier-Analysis

Aufgabe 13 (Wieners Lemma)
Es sei $f \in A(\mathbb{T}) : f(t) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{T}$. Dann gilt $\frac{1}{f(t)} \in A(\mathbb{T})$, dass heißt

$$\exists \{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z}) : \ \frac{1}{f(t)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k e^{ikt}.$$

Definition 8 (Summationskerne). *a) Ein Summationskern auf $\mathbb{T}$ ist eine Familie $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen mit folgenden drei Eigenschaften:*

(S1) $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_j(t)dt = 1,\ \forall j \in \mathbb{N}$,

(S2) $\exists M \in \mathbb{R}^+ :\ \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k_j(t)|dt \leq M,\ \forall j \in \mathbb{N}$,

(S3) $\forall 0 < \delta < \pi\ \lim_{j\to\infty} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_j(t)|dt = 0$.

Ein Summationskern heißt positiv, falls $k_j(t) \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{T},\ j \in \mathbb{N}$.

b) Ein Summationskern auf $\mathbb{R}$ ist eine Familie $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}^+}$ stetiger Funktionen mit folgenden drei Eigenschaften:

(s1) $\int_{\mathbb{R}} k_\lambda(t)dt = 1,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$,

(s2) $\exists M \in \mathbb{R}^+ :\ \int_{\mathbb{R}} |k_\lambda(t)|dt \leq M,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$,

(s3) $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ :\ \lim_{\lambda\to\infty} \int_{|x|>\delta} |k_\lambda(t)|dt = 0$.

Aufgabe 14 (Summationskerne auf $L^1(\mathbb{T})$)
Es sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ein Summationskern.
Zeigen Sie:

a) Der Fejérkern ist ein Summationskern auf $\mathbb{T}$.

b) Sei B ein Banachraum, und sei $\phi : \mathbb{T} \to B$ stetig.
Zeigen Sie
$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_j(t)\phi(t)dt = \phi(0).$$

c) $f = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_j(t) f(\,\cdot\, - t)dt$*, mit Gleicheit in $L^1(\mathbb{T})$.*

d) Es sei $k \in C(\mathbb{T})$.
Zeigen Sie
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(t) f(\,\cdot\, - t)dt = k * f.$$

e) $\lim_{j\to\infty} \|k_j * f - f\| = 0$.

Aufgabe 15 (Summationskerne auf $L^1(\mathbb{R})$)

a) *Es sei* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$.
Zeigen Sie, dass $k_\lambda := D_\lambda f$ *ein Summationskern auf* $L^1(\mathbb{R})$ *ist.*

b) *Sei* $F(x) := \frac{1}{2\pi} \left(\frac{sin(\frac{x}{2})}{x/2} \right)^2$.
Der Fejérkern $F_\lambda := D_\lambda F$ *ist ein Summationskern auf* $L^1(\mathbb{R})$.

c) *Sei* $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ *ein Summationskern.*
Zeigen Sie
$$\lim_{\lambda \to \infty} \|f - k_\lambda * f\| = 0.$$

Definition 9 (Häufig verwendete Operatoren)**.** *Mit* $\mathcal{B}(B)$ *seien die beschränkten linearen Operatoren auf dem Banachraum* B *bezeichnet.*
Es seien $A \in Gl(n)$, $\rho \in O(n)$, $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c_A, c_\rho, c_a \in \mathbb{R}^+$ *und* $p \in \{1, 2\}$. *Bezeichne*

(1) $A : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto c_A f(A\ \cdot\ )$.

(2) $\rho : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto c_\rho f(\rho\ \cdot\ )$ *Rotation.*

(3) $D_a : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto c_a f(a\ \cdot\ )$ *Dilatation.*

(4) $T_b : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto f(\ \cdot\ - b)$ *Translation.*

(5) $M_b : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto e^{-2\pi i \langle\ \cdot\ , b\rangle} f(\ \cdot\ )$ *Modulation.*

Aufgabe 16 (Fouriertransformation und Operatoren)

a) *Die in Definition 9 definierten Operatoren liegen in* $\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}^n))$.

b) *Finden Sie Konstanten* c_A, c_ρ, c_a, *so dass diese Operatoren für* $p = 1$, *bzw. für* $p = 2$ *Isometrien sind.*

c) *Berechnen Sie die Fouriertransformationen dieser Operatoren angewandt auf* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 17 (Invariante Räume unter der Fouriertransformation)

a) *Es sei*
$$\mathcal{H}_0(\mathbb{R}) := \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \ f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \text{ f.ü.}\}$$
der Unterraum der geraden Funktionen und
$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}) := \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \ f(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \text{ f.ü.}\}$$
der Unterraum der ungeraden Funktionen. Zeigen Sie, dass diese Räume invariant unter der Fouriertransformation sind, dass heißt
$$f \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{F}(f) \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}), \ \forall l = 0, 1.$$

b) *Es sei*
$$\mathcal{H}_0(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : f(x) = f(|x|) \text{ f.ü.}\}$$
Der Raum der radialen Funktionen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}_0(\mathbb{R}^n)$ *invariant unter der Fouriertransformation ist.*