

## 1. Problemstellung

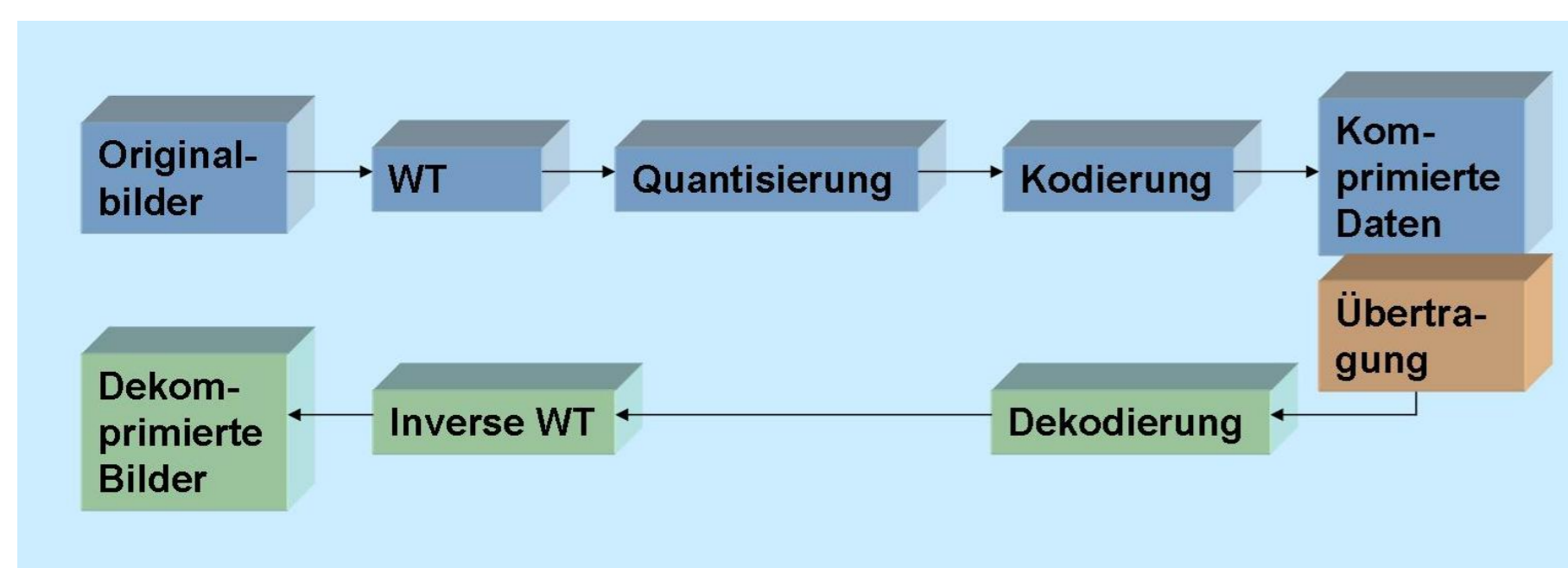
Durch die rasante Entwicklung der medizinischen Bildanalyse ist es möglich, den menschlichen Körper so genau wie nie zuvor zu scannen. Dabei entstehen jedoch derart große Datenmengen, dass die Speicherung und Übermittlung dieser zum Problem wird. Deshalb werden sogenannte **Komprimierungsverfahren** immer wichtiger. Damit kann der Speicherbedarf erheblich reduziert werden und somit eine effiziente Speicherung und schnelle Übermittlung ermöglicht werden.



Die Daten, beispielsweise erzeugt durch Computertomographie, liegen in Form von einzelnen Schichtbildern vor, die zu einem dreidimensionalen Volumenbild zusammengesetzt werden können. Bei der Komprimierung kann man entweder die Schichtbilder einzeln komprimieren (schichtweise 2D-Komprimierung) oder das Volumenbild entlang aller drei Dimensionen (3D-Komprimierung). In meiner Diplomarbeit habe ich ein Verfahren für die 3D-Kompression entwickelt und dieses mit der schichtweisen 2D-Komprimierung verglichen.

## 2. Bildkompressionsverfahren

Das Bildkompressionsverfahren ist gemäß folgender Graphik aufgebaut:



Zunächst werden die Originaldaten einer Wavelettransformation unterworfen. Die Waveletkoeffizienten werden dann quantisiert und kodiert. Die derart komprimierten Daten können nun effizienter gespeichert und/oder übertragen werden. Bei der Dekomprimierung kommen die entsprechenden inversen Operationen zur Anwendung. Nur die verlustbehaftete Quantisierung kann nicht rückgängig gemacht werden. Dadurch entstehen die Fehler im dekomprimierten Bild, die es zu minimieren gilt.

## 3. Wavelettransformation

### Die kontinuierliche Wavelettransformation

Sei  $\psi$  ein (Mutter-)Wavelet, also eine Funktion in  $L^2(\mathbb{R})$ , welche die Zulässigkeitsbedingung  $0 < c_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty$  erfüllt ( $\hat{\psi}$  bezeichne die Fouriertransformierte von  $\psi$ ).

Weiterhin sei  $\{\psi_{u,s}\}_{(u,s) \in \mathbb{Z}^2}$  die Waveletfamilie, die sich durch Translation und Skalierung des Mutterwavelets ergibt:  $\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi(\frac{t-u}{s})$ .

Dann gilt für ein Signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$ :

$$f = \sum_{(u,s) \in \mathbb{R}^2} \langle f, \psi_{u,s} \rangle \psi_{u,s}$$

(mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  werde das Skalarprodukt des Hilbertraumes  $L^2(\mathbb{R})$  bezeichnet). Das Signal  $f$  kann also aus der Menge der Waveletkoeffizienten  $\{\langle f, \psi_{u,s} \rangle\}_{(u,s) \in \mathbb{R}^2}$  rekonstruiert werden.

### Diskretisierung

Mit Hilfe der Multiskalenanalyse lassen sich Wavelets konstruieren, so dass die diskrete Menge von Waveletkoeffizienten  $\{\langle f, \psi_{m,n} \rangle\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$  mit  $\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi(\frac{t-2^m n}{2^m})$ ,  $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$  eine Orthonormalbasis des  $L^2(\mathbb{R})$  bildet. Für die Rekonstruktion des Signals gilt folglich:

$$f = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}$$

### Effiziente Berechnung der Waveletkoeffizienten

Definiert man mit Hilfe der Skalierungsfunktion  $\phi$  und der Waveletfunktion  $\psi$  der Multiskalenanalyse die diskreten Filter  $h[n] = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(\frac{\cdot}{2}), \phi(t-n) \rangle$  und  $g[n] = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(\frac{\cdot}{2}), \phi(t-n) \rangle$ , so lassen sich die Waveletkoeffizienten als Faltungsprodukt mit diesen Filtern rekursiv berechnen. Folgender Satz liefert die Berechnungsformeln der schnellen Wavelettransformation:

#### Satz 1 Schnelle Wavelettransformation

Für die Zerlegung eines Signal in Approximationskoeffizienten  $a_j[n] = \langle f, \phi_{j,n} \rangle$  und Detailkoeffizienten  $d_j[n] = \langle f, \psi_{j,n} \rangle$  gilt:

$$a_{j+1}[n] = a_j * \bar{h}[2n]$$

$$d_{j+1}[n] = a_j * \bar{g}[2n]$$

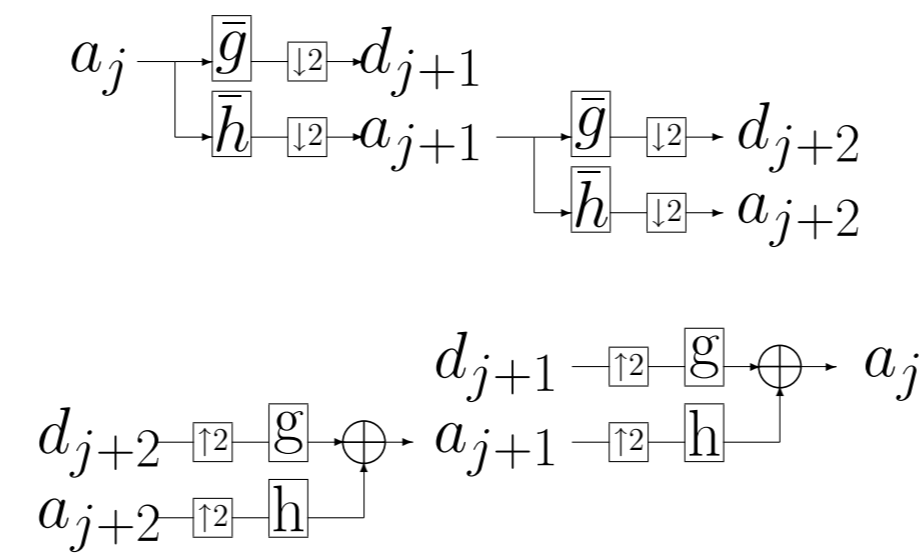
mit  $x * y(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y(n-k)x(k)$  (diskrete Faltung) und  $\bar{x}[n] = x[-n]$  (Spiegelung).

Die Rekonstruktion erhält man durch:

$$a_j[n] = \bar{a}_{j+1} * h[n] + \bar{d}_{j+1} * g[n]$$

mit  $\bar{x}[n] = \begin{cases} x[p] & \text{falls } n = 2p \\ 0 & \text{falls } n = 2p+1 \end{cases}$ .

Schematische Darstellung von je zwei Schritten der Zerlegung und der Rekonstruktion:



### Erweiterung ins Mehrdimensionale

Der Tensoransatz liefert Waveletbasen für mehrdimensionale Signale in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ :

#### Satz 2 Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R}^d)$

Sei  $\theta^0 = \phi$  eine Skalierungsfunktion und  $\theta^1 = \psi$  das zugehörige Wavelet, das eine Waveletorthonormalbasis von  $L^2(\mathbb{R})$  erzeugt. Definiere

$$\psi^{|\varepsilon|}(x) = \theta^{\varepsilon_1}(x_1) \cdot \dots \cdot \theta^{\varepsilon_d}(x_d)$$

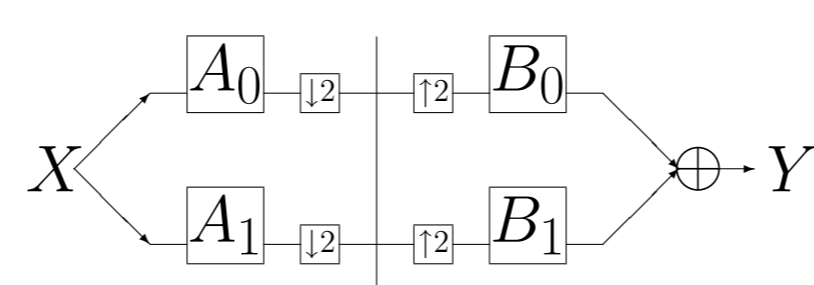
mit  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  und  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in \{0,1\}^d$  und  $|\varepsilon| := \sum_{i=1}^d \varepsilon_i 2^{i-1}$  ( $\varepsilon$  ist die Binärdarstellung der Zahl  $|\varepsilon|$ ).

Dann ist

$$\{\psi_{j,n}^{|\varepsilon|}\}_{0 < |\varepsilon| < 2^d, (j,n) \in \mathbb{Z}^{(d+1)}}$$

eine Orthonormalbasis von  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

### Eigenschaften der Filterbank



Perfekte Rekonstruierbarkeit  $\Leftrightarrow A_0(z)B_0(z) + A_1(z)B_1(z) = 2$  und  $A_0(-z)B_0(z) + A_1(-z)B_1(z) = 0$

Möglichst wenige Nicht-Null-Filterkoeffizienten bei möglichst vielen verschwindenden Momenten  $\rightarrow$  Daubechies Filter

Symmetrie:  $\rightarrow$  biorthogonale Filter

### Dualbaum-Methode

Um eine höhere Richtungsselektivität und damit bessere Quantisierbarkeit zu erreichen, werden komplexe, analytische Wavelets konstruiert:

#### Satz 3 Analytisches Wavelet

Sind  $\psi_1$  und  $\psi_2$  reelle Wavelets und ist  $\psi_2$  die Hilberttransformierte von  $\psi_1$ , dann ist

$$\psi_c(t) = \psi_1(t) + i \psi_2(t)$$

ein komplexes, analytisches Wavelet.

Für die Fouriertransformierte gilt:

$$\hat{\psi}_c(\omega) = \begin{cases} 2 \hat{\psi}_1(\omega) & \text{für } \omega > 0 \\ \hat{\psi}_1(\omega) & \text{für } \omega = 0 \\ 0 & \text{für } \omega < 0 \end{cases}$$

Die Analytizität widerspricht sich jedoch mit der Forderung nach endlichen, perfekt rekonstruierbaren Filtern. N. Kingsbury hat deshalb die

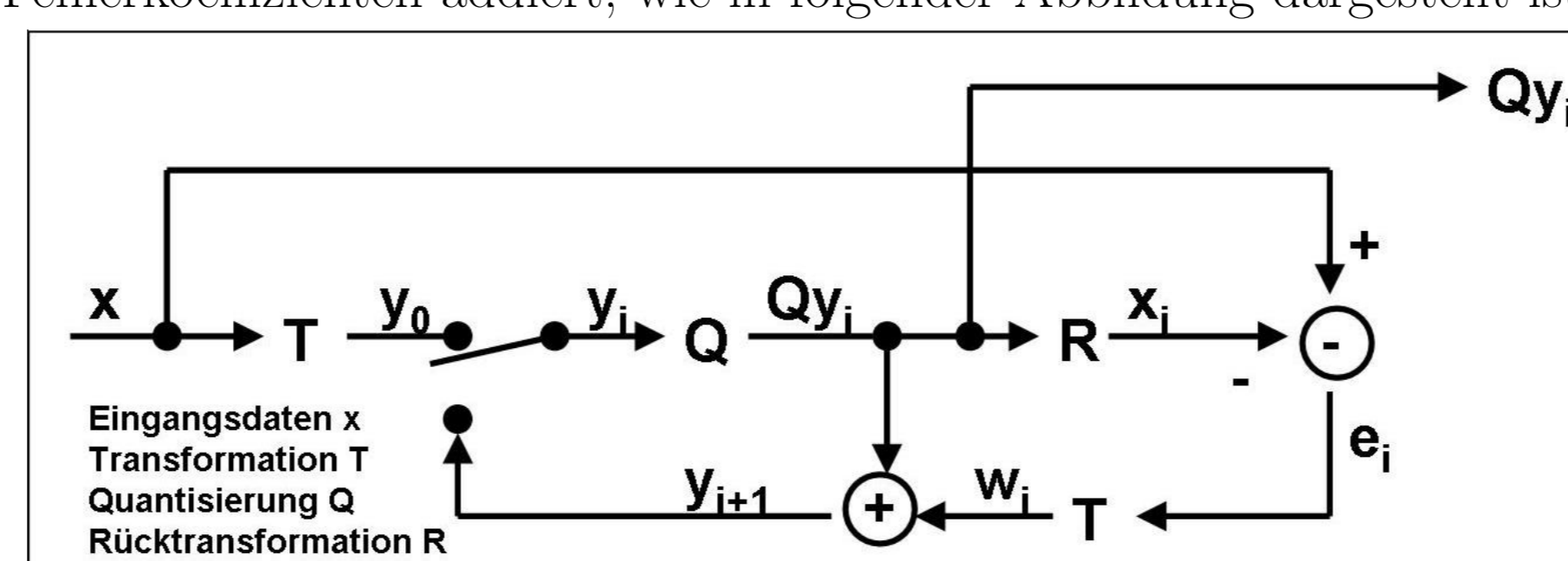
**Dualbaum-Methode** entwickelt, die aus zwei reellen, parallel ausgeführten Wavelettransformationen besteht. Interpretiert man den einen Baum als Realteil und den anderen als Imaginärteil, so erhält man eine komplexe Transformation. Man erreicht mit diesem Verfahren eine annähernde Analytizität (nur annähernd, da in der Praxis mit nur wenigen Nicht-Null-Filterkoeffizienten gerechnet werden kann).

In der Diplomarbeit habe ich gezeigt, dass man genau dann Wavelet-Hilberttransformationspaare erhält, wenn die dazugehörigen Filter die Half-Sample-Delay-Bedingung  $h_2[n] = h_1[n-1/2]$  erfüllen. Perfekt rekonstruierbare Filter, die dies annähernd erfüllen, sind die sogenannten **q-shift-Filter**.

Die Erweiterung ins Dreidimensionale erfolgt analog zu den reellen Wavelets. Da die komplexen, analytischen Wavelets jedoch nur sehr eingeschränkte Passbänder haben, sind für die vollständige Beschreibung eines dreidimensionalen Signals auch komplex konjugierte Varianten zu betrachten.

## 4. Quantisierung

Zur skalaren Quantisierung verwende ich Schwellwertoperationen und Rundungen. Da diese nicht reversibel sind, entstehen hier die Fehler der Komprimierung. Für die Waveletkoeffizienten der Dualbaum-Methode lassen sich die Fehler jedoch stark reduzieren, wenn man bei der Dekomprimierung die sogenannte iterative, projektionsbasierte Fehlermodellierung anwendet. Dabei werden zu den quantisierten Koeffizienten iterativ Fehlerkoeffizienten addiert, wie in folgender Abbildung dargestellt ist.



Dadurch, dass die Dualbaum-Methode nicht surjektiv ist und deshalb bei der Rücktransformation die Koeffizienten zunächst in den Bildbereich projiziert werden müssen, kann der Fehler der Quantisierung stark reduziert werden.

## 5. Kodierung

Neben allgemeinen verlustfreien Verfahren wie die variable Längenkodierung ist vor allem die eingebettete zerotree Kodierung von Waveletkoeffizienten (EZW) nach J. M. Shapiro sehr gut geeignet, um die quantisierten Koeffizienten zu kodieren. Der ausführliche Algorithmus findet sich in meiner Ausarbeitung.

## 6. Fehlerabschätzung

Mit Hilfe von Besov-Räumen kann eine Abschätzung für den Fehler der Komprimierung angegeben werden:

#### Satz 4 Fehlerabschätzung

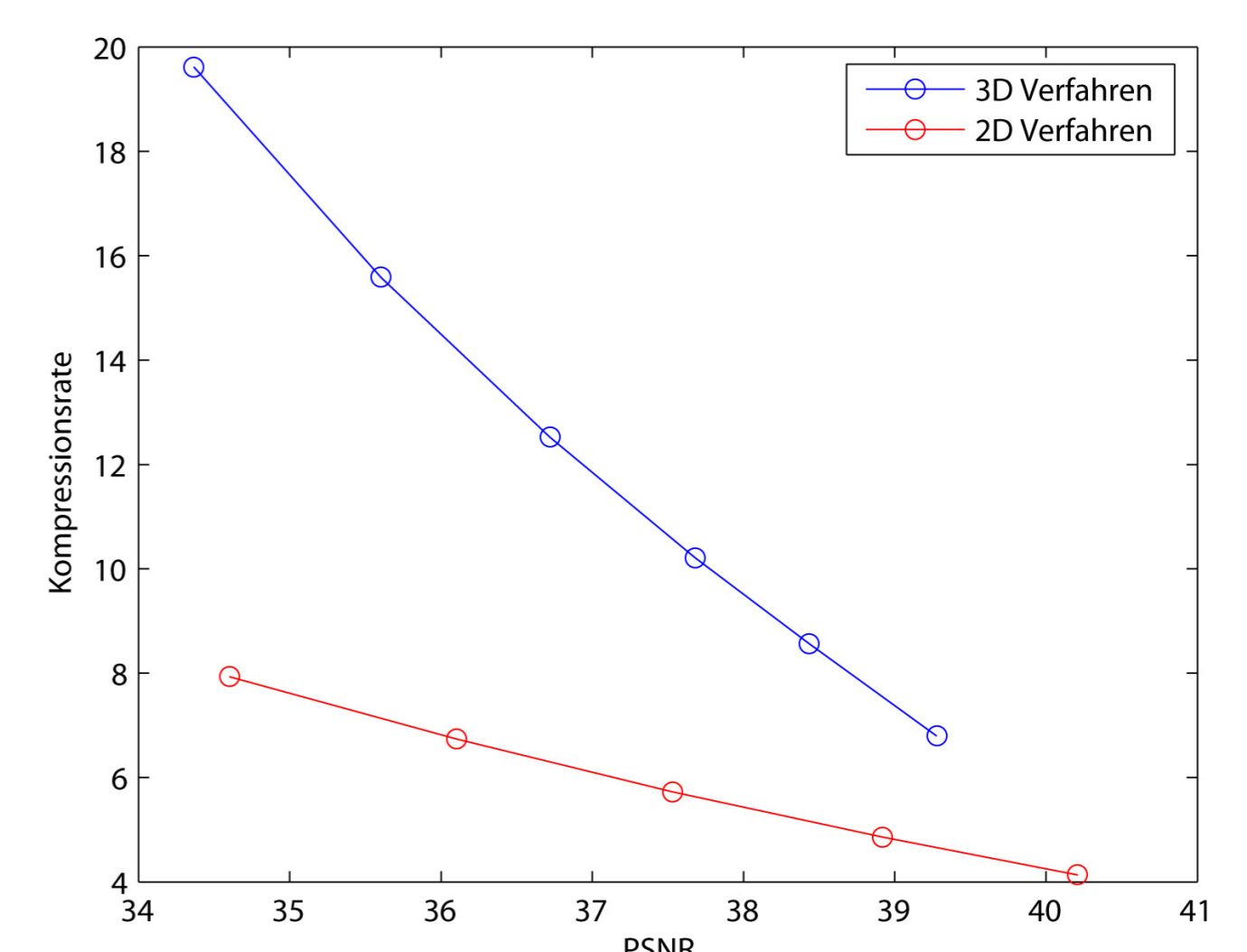
Sei  $f \in B_{\tau,\tau}^s$  mit  $s > 0, \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2} + \frac{s}{d}$ .  $\tilde{f}$  erhalte man aus  $f$  durch Quantisierung nach folgender Strategie: Für ein  $\varepsilon > 0$  setze man alle Koeffizienten mit  $|c_\lambda| \leq \varepsilon$  auf 0 und die übrigen Koeffizienten quantisiere man so, dass  $|c_\lambda - \tilde{c}_\lambda| \leq \varepsilon$  erfüllt wird. Weiter sei  $N_q$  die Anzahl der Bits, die man für die Quantisierung benötigt. Dann folgt

$$\|f - \tilde{f}\|_{L^2} \leq C N_q^{-\frac{s}{d}}$$

Damit variiert die Fehlerabschätzungsrate bei der 3D-Kompression und bei der Methode der Kompression der einzelnen, zweidimensionalen Schichtbilder um den Faktor  $S^3$  mit  $S$  gleich der Anzahl der Schichtbilder.

## 7. Ergebnisse

Das 3D-Bildkompressionsverfahren habe ich in Matlab implementiert, ebenso wie die schichtweise 2D-Komprimierung, um die Ergebnisse vergleichen zu können. Für beide Varianten habe ich verschiedene Einstellungen getestet, wie Filter, Anzahl der Transformationsstufen, Art der Transformation, Art der Schwellwertoperation und Fehlermodellierung ja/nein, um die beste Einstellung zu ermitteln. Zum Vergleich der Bildqualität verwende ich das Signal-Rauschverhältnis (PSNR), das sich als skaliertes Logarithmus aus dem Verhältnis von maximalem Bildwert und der Quadratwurzel des mittleren Fehlers berechnet. Als Kompressionsrate setze ich die Anzahl der Nicht-Null-Voxel der Bildreihe vor der Komprimierung mit der Anzahl der Nicht-Null-Koeffizienten nach der Quantisierung ins Verhältnis. Folgende Grafik zeigt die Ergebnisse der 3D-Komprimierung im Vergleich zur 2D-Komprimierung:



Das 3D-Verfahren zeigt deutlich bessere Raten. Es kann hier eine Kompression um den Faktor 10 bei einem PSNR-Wert von etwa 38 erzielt werden.

## Literatur

- [1] S. Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing, Academic Press, 1998, 1st.
- [2] I. W. Selesnick and R. G. Baraniuk and N. G. Kingsbury, The Dual-Tree Complex Wavelet Transform, IEEE Signal Processing Magazine, November, 2005.
- [3] N. G. Kingsbury, A Dual-tree Complex Wavelet Transform with Improved Orthogonality and Symmetry Properties, Proceedings of the IEEE Int. Conf. on Image Proc. (ICIP), 2000.
- [4] T. H. Reeves and N. G. Kingsbury, Overcomplete image coding using iterative projection-based noise shaping, Proc. IEEE Conf. on Image Processing, Rochester NY, paper 2492, 2002.
- [5] A. Cohen, Lecture Notes in Mathematics: Multiscale Problems and Methods in Numerical Simulations: Theoretical, Applied and Computational Aspects of Non-linear Approximation, Springer Berlin-Heidelberg, pp 1-29, 2003.
- [6] J. M. Shapiro, Embedded Image Coding Using Zerotrees of Wavelet Coefficients, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 41, No. 12, 1993.